

Aplikácia fuzzy dispečerských prioritných pravidiel

Ladovský Tomáš · Informačné technológie

09.05.2011



Článok sa venuje problému rozvrhovania úloh identickým paralelným strojom pomocou konštrukčnej heuristiky, známej pod názvom dispečerske prioritné pravidlá, pričom optimalizačným kritériom je zrovnomenenie pracovného zaťaženia strojov. Technika dispečerských prioritných pravidiel patrí medzi prvé techniky, ktoré boli použité na riešenie problému identických paralelných strojov.

Princíp dispečerských prioritných pravidiel spočíva v pridelení priority nerozvrhnutým úlohám a následnom vytváraní rozvrhu postupne od úlohy s najväčšou prioritou po úlohu s najmenšou prioritou. Prioritu prideliujeme úlohám vzhľadom na ich dobu spracovania, pričom časy spracovania jednotlivých úloh sú neisté a modelované pomocou fuzzy trojuholníkových čísel. Pre pridelenie priority potrebujeme vedieť porovnať medzi sebou jednotlivé časy spracovania, čo sa u fuzzy čísel nedá urobiť jednoznačne (kvôli neistote).

Výsledok rozvrhovacieho problému je preto ovplyvnený rozhodnutím voľby metódy porovnania. Najskôr teda preskúmame a porovnáme metódy porovnania fuzzy trojuholníkových čísel a následne ich použijeme v dispečerských prioritných pravidlách, ktoré aplikujeme na problém rozvrhovania úloh identickým paralelným strojom.

1. Úvod

Problém umiestnenia/priradenia úloh identickým paralelným strojom môžeme formulovať nasledujúco: Máme priradiť n úloh na m identických strojov tak, aby sme neporušili obmedzenia a optimalizovali zadané optimalizačné kritéria. Platí, že **Formula does not parse**, kde P predstavuje identické paralelné stroje, m je počet strojov a f je miera nerovnomernosti. Je dokázané, že minimalizácia času skončenia poslednej úlohy $f = C_{max}$, čo sa dá taktiež formulovať ako minimalizácia maximálneho zaťaženia [20], vedie k zrovnomenovaniu pracovnej záťaže. Takýto systém môžeme klasifikovať ako $P_m || C_{max}$ a ide o jeden z najviac študovaných systémov v literatúre. V článku ale používame na určenie miery rovnomernosti rozvrhu inú funkciu.

Garey a Johnson 1979 [6] ukázali, že problém rozvrhovania úloh identickým paralelným strojom je pre $m \geq 2$ NP-ťažký. Z tohoto dôvodu prehľadávanie hrubou silou, dynamické programovanie, celočíselné programovanie a metóda vetiev a hraníc sa používajú na získanie optimálneho riešenia len pre malé a stredne veľké inštancie

problému. Pre veľké inštanície sú nepoužiteľné.

Doposiaľ sa nenašiel efektívny polynomiálny algoritmus s optimálnym riešením a to viedlo veľa výskumníkov k vytváraniu heuristik. Aj keď heuristiky negarantujú nájdenie optimálneho riešenia, tak poskytujú približné (aproximačné) riešenia, ktoré sú skoro tak dobré ako optimálne riešenia. Tieto je možné rozdeliť zhruba na zlepšujúce heuristiky a konštruktívne heuristiky. Do prvej kategórie patria algoritmy založené na lokálnom prehľadávaní okolia prípustného riešenia. Aplikácie takýchto algoritmov na riešenie problému $P_m || C_{max}$ môžeme nájsť v ([2],[1],[5])

Väčšina algoritmov patriacich do druhej kategórie majú známe pomery najhoršieho riešenia, získaného heuristikou, k optimálnemu riešeniu (worst case performance ratio). Medzi ne patria aj dispečerské prioritné pravidlá. Dispečerske pravidlo LPT (longest processing time first) bolo prvý krát predstavené Grahamom [7] v roku 1969. Toto dispečerske pravidlo sa stalo kritériom pri navrhovaní efektívnych algoritmov. Je známe, že zrovnomerňuje jednotlivé výkony strojov. Zrovnomerňovanie spôsobuje ponechanie najmenších časov spracovania na koniec rozvrhovania.

Ľudský faktor, výrobné chyby alebo výskyt porúch zapríčiňujú, že časy spracovania sú neistého charakteru. Takéto neisté časy spracovania môžeme modelovať pomocou fuzzy čísel. Pre porovnanie fuzzy čísel neexistuje univerzálna metóda, pomocou ktorej by sme ich vedeli porovnať a zoradiť. Veľa dispečerských pravidiel prideluje prioritu úlohám na základe relácie usporiadania časov spracovania úloh. Pridelovanie priority vyžaduje reláciu lineárneho usporiadania, ktorá pre fuzzy čísla nie je lineárne usporiadaná.

Pojem fuzzy množiny bol prvý krát predstavený americkým expertom na automatizáciu L. A. Zadehom [22] a pojem fuzzy čísla predstavili Jain [9] a Dubois a Prade [3]. Výskum porovnania fuzzy čísel je jednou z veľmi dôležitých tém teórie fuzzy množín a aplikuje sa na všetky oblasti rozhodovania. Napríklad poňatie optimality alebo najlepšieho výberu je kompletne založené na porovnaní (poradí). Fuzzy čísla nevieme ľahko usporiadať v poradí ich veľkosti, pretože predstavujú neisté a neurčité hodnoty, ktoré vyjadrujeme možnosťami rozdeleniami a môžu sa navzájom prekrývať. Ak sa dve fuzzy čísla prekrývajú, potom ich nemožno považovať za absolútne usporiadateľné [11]. To znamená, že jedenkrát môžeme považovať fuzzy číslo za väčšie ako ostatné, no pri inej metóde porovnania ho môžeme považovať za menšie ako ostatné. Dôsledkom je, že aj keď uvažujeme iba dve fuzzy čísla, potom výsledkom ich porovnanie sú dve postupnosti poradia v danom čase.

Ak usporiadame fuzzy čísla z obrázka 1a podľa ťažiska, Yager [21], tak získame výstupnú postupnosť A_2, A_1, A_3, A_4 , kde A_2 je najmenšie a A_4 najväčšie fuzzy číslo. U fuzzy čísel A_2 a A_4 je ihneď jasné, že fuzzy číslo A_4 je absolútne väčšie ako A_2 . Ak sa ale fuzzy čísla navzájom prekrývajú, potom ich nemôžeme považovať za absolútne usporiadateľné. Napríklad, fuzzy čísla A_1 a A_3 sa navzájom prekrývajú a tak nemôžeme považovať fuzzy číslo A_3 za absolútne väčšie ako A_1 . Stále totiž existuje možnosť, že A_1 je väčšie ako A_3 .

Veľké množstvo prioritných pravidiel je založené na porovnaní čísel. Článok prezentuje problém pridelovania úloh paralelným strojom, ktorých časy spracovania sú

modelované pomocou trojuholníkových fuzzy čísel, ktoré sú vytvorené na základe štatistického súboru (tréningových dát) a snažíme sa nimi popísať očakávané časy spracovania úloh.

Na porovnanie fuzzy hodnôt neexistuje univerzálna metóda, tak ako sme zvyknutí u reálnych čísel. V dnešnej dobe existuje veľké množstvo metód, pomocou ktorých sme schopní porovnať fuzzy čísla. Rozdielne prístupy porovnania fuzzy čísel môžeme podľa Nasserihho [14] a Ramliho [18] kategorizovať do štyroch hlavných tried: relácie preferencie, posibilitné¹ rozdelenia fuzzy priemeru a rozptylu, fuzzy bodovanie a lingvistické vyjadrovanie. My sa zameriame na centroidné metódy, ktoré patria do skupiny fuzzy bodovania. K týmto skupinám pridáme lexikografický a agregáčny prístup porovnania fuzzy trojuholníkových čísel.

Cieľom článku je prezentovanie metód porovnania fuzzy čísel, dispečerských prioritných pravidiel a ich aplikovania na riešenie problému pridelovania úloh parálnym strojom. Taktiež nás zaujíma vplyv výberu metódy porovnania na optimalitu riešenia (rovnomernosť) a vplyv výberu dispečerskeho prioritného pravidla na rovnomernosť rozvrhu. Nasledujúca sekcia definuje pojem fuzzy čísla.

2. Fuzzy čísla

Nech \mathfrak{R} je množina reálnych čísel. Fuzzy množinu A definujeme na \mathfrak{R} pomocou funkcie príslušnosti $\mu_A : \mathfrak{R} \rightarrow [0, 1]$, kde $\mu_A(x)$ predstavuje stupeň príslušnosti elementu x vo fuzzy množine A . Fuzzy podmnožina A definovaná na \mathfrak{R} je normálna, ak a iba ak

$$H(A) = \sup_{x \in \mathfrak{R}} \{\mu_A(x)\} = 1$$

kde $H(A)$ je výška fuzzy množiny A . Fuzzy podmnožina A množiny \mathfrak{R} je konvexná, ak a iba ak

$$\mu_A(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$$

kde $x, y \in \mathfrak{R}$ a $\lambda \in [0, 1]$. Nosič množiny A je definovaný ako

$$S(A) = \{x \mid \mu_A(x) > 0\}.$$

Fuzzy množinu A sa nazýva fuzzy číslo, ak a iba ak A je normálna, konvexná a nosič množiny A je ohraničený na \mathfrak{R} . Trojuholníkové fuzzy číslo A je fuzzy číslom so spojitou lineárnou funkciou príslušnosti $\mu_A(x)$ definovanou ako:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \mathcal{L}_A(x) = (x - a)/(b - a) & \text{pre } a \leq x \leq b \\ \mathcal{R}_A(x) = (c - x)/(c - b) & \text{pre } b \leq x \leq c \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

kde $\mathcal{L}_A : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ je striktne rastúca funkcia a $\mathcal{R}_A : [b, c] \rightarrow [0, 1]$ je striktne klesajúca funkcia. V nasledujúcom texte používame namiesto pojmu trojuholníkové fuzzy číslo skrátenej tvar fuzzy číslo. Fuzzy číslo môžeme taktiež značiť ako usporiadanú trojicu $A = (a, b, c)$, kde $a \leq b \leq c$ a $a, b, c \in \mathfrak{R}$. Hodnota a je nazývaná

infimom, b je nazývaná modusom a c je nazývaná suprémom.

Taktiež sa používajú označenia pre a ako ľavá hodnota, spodná hodnota, pre b sa používajú označenia ako centrálna hodnota, stredná hodnota a pre c sa používajú označenia ako pravá hodnota, horná hodnota. V nasledujúcom texte sa obmedzíme na také trojuholníkové fuzzy čísla, ktorých hodnoty usporiadanej trojice sa nerovnajú. Definujme množinu všetkých fuzzy čísel s prirodzenými hodnotami a, b, c ako

Formula does not parse a $\mathcal{R}_A^{-1}: [0, 1] \rightarrow [b, c]$ k funkciám \mathcal{L}_A a \mathcal{R}_A definujeme (viď. obrázok 1b) pre fuzzy číslo A ako

$$\mathcal{L}_A^{-1}(y) = a + (b - a)y \quad \text{a} \quad \mathcal{R}_A^{-1}(y) = c + (b - c)y$$

kde $y \in [0, 1]$. Označme reálny interval A_α ako α -rez fuzzy množiny A a definujeme ho ako

$$A_\alpha = [a_\alpha^L, a_\alpha^R] = [\mathcal{L}_A^{-1}(\alpha), \mathcal{R}_A^{-1}(\alpha)] = [a + (b - a)\alpha, c + (b - c)\alpha]$$

Nech $m(A_\alpha)$ je centrálna hodnota elementov α -rezu, ktorú pre fuzzy číslo $A = (a, b, c)$ spočítame ako

$$m(A_\alpha) = m[a_\alpha^L, a_\alpha^R] = ((2b - a - c)\alpha + (a + c))/2$$

kde $\alpha \in [0, 1]$. Nech A je ľubovoľné fuzzy číslo $A = (a, b, c)$, potom obsah plochy $a(A)$ (pod grafom $m(A_\alpha)$) (viď. obrázok 2a) spočítame pre $\alpha \in [0, 1]$ ako

$$a(A) = \int_0^1 m[a_\alpha^L, a_\alpha^R] d\alpha = (a + 2b + c)/4$$

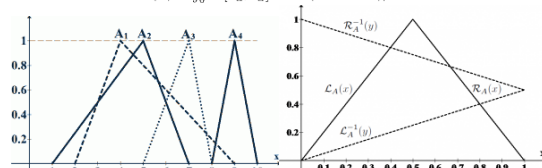


Fig.1 Na ľavom obrázku (a) sú zobrazené štyri fuzzy čísla, na ktorých demonštrujeme problém ich porovnania. Fuzzy čísla A_2 a A_3 sa s fuzzy číslom A_4 neprekrývajú, preto vieme ľahko povedať, že A_2 a A_3 sú menšie ako A_4 . Ako je to ale s fuzzy číslami A_1 a A_3 . Tieto dve fuzzy čísla sa prekrývajú. Pre α -rez oboch fuzzy čísel platí, že $A_{3,\alpha}$ je podmnožinou $A_{1,\alpha}$, pre $\alpha \in [0, 0.23]$. To znamená, že pri pesimistickej optimalizácii, kde preferujeme väčšiu šírku intervalu $A_{1,\alpha}$ pred menšou $A_{3,\alpha}$, zvolíme za väčšie fuzzy číslo A_1 a to pre hladiny $\alpha \in [0, 0.23]$. Pre hladiny $\alpha \in [0.23, 0.6]$ nastáva nejasná situácia, ktorý α -rez je väčší a ktorý menší, aj keď pravá hodnota intervalu $A_{3,\alpha}$ je väčšia ako pravá hodnota intervalu $A_{1,\alpha}$. Nakoniec pre hladiny $\alpha \in [0.6, 1]$ sa intervaly $A_{1,\alpha}$ a $A_{3,\alpha}$ neprekrývajú. Alfa rez $A_{3,\alpha}$ je väčší ako $A_{1,\alpha}$, a to z toho dôvodu, že ľavá hodnota $A_{3,\alpha}$ je väčšia ako pravá hodnota $A_{1,\alpha}$. Na pravom obrázku (b) je zobrazená inverzná funkcia členstva fuzzy trojuholníkového fuzzy čísla

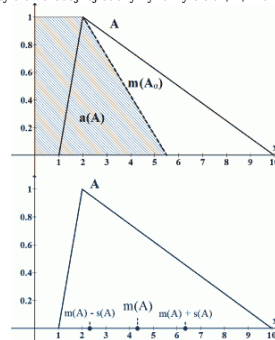
Strednú hodnotu fuzzy čísla A spočítame ako

$$m(A) = (a + b + c)/3$$

a smerodajnú odchýlku fuzzy čísla A spočítame ako

$$s(A) = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac} / (3\sqrt{2})$$

Ukážku strednej hodnoty a smerodajnej odchýlky fuzzy čísla A môžeme vidieť na obrázku 2b.



Na ľavom obrázku (a) môžeme vidieť obsah oblasti ohraničenej funkciou $m(A_\alpha)$ a x -ovou osou. Pravý obrázok (b) zobrazuje strednú hodnotu a smerodajnú odchýlku fuzzy čísla A . Nasledujúca sekcia definuje niekoľko metód porovnania fuzzy trojuholníkových čísel.

3. Metódy porovnania fuzzy čísel

Nech $\mathcal{H}(N)$ je množina všetkých fuzzy čísel definovaných na množine reálnych čísel \mathfrak{R} a $A, B \in \mathcal{H}(N)$. Nasledujúci text porovnáva fuzzy čísla pomocou funkcie $F: \mathcal{H}(N) \rightarrow \mathfrak{R}$, ktorú nazývame porovnávacia funkcia alebo index porovnania (angl. ranking function, ranking index). Ak platí $F(A) \leq F(B)$, potom $A \leq B$ a znamená to, že fuzzy číslo A je menšie alebo rovné ako B vzhľadom na zvolenú funkciu porovnania. Výsledky optimalizačného problému sú závislé na správnej voľbe funkcie porovnania a to vzhľadom na preferenciu riešiteľa, ktoré môžu byť známe pred začatím procesu optimalizácie (apriórne techniky), v priebehu procesu optimalizácie (interaktívne techniky) alebo až po skončení optimalizácie (aposteriórne techniky). Medzi apriórne techniky patrí lexicografický a agregáčny prístup.

Yager v roku 1980 [21] navrhol, že väčšie z dvoch fuzzy čísel je to, ktoré má väčšiu hodnotu

$$F^{(1)}(A) = m(A)$$

Na Yagerov index sa ešte pozrieme detailnejšie neskôr a to z toho dôvodu, že sa tento index stal základom novej vetvy metód porovnania fuzzy čísel (centroidné metódy). Väčšie fuzzy číslo má väčšiu hodnotu $F^{(1)}(A)$, Bector a Chandra použili na porovnanie dvoch fuzzy čísel funkciu porovnania

$$F^{(2)}(A) = a(A)$$

Väčšie fuzzy číslo má väčšiu hodnotu $F^{(2)}(A)$. Ak porovnáme fuzzy čísla iba na základe jednej hodnoty (porovnávacia funkcia, index), tak potom dochádza k určitej strate informácie alebo index porovnania považuje veľkú množinu rôznych fuzzy čísel za rovnaké. Preto sa používajú viackriteriálne optimalizačné techniky ako lexicografický prístup a agregáčny prístup. V lexicografickom prístupe sa rozhoduje podľa viacerých kritérií. McCahon a Lee [12] stanovili dve kritéria

$$F_1^{(3)}(A) = m(A), \quad \text{a} \quad F_2^{(3)}(A) = s(A).$$

Väčšie z dvoch fuzzy čísel je to, ktoré má väčšiu strednú hodnotu $F_1^{(3)}$, v prípade zhody stredných hodnôt je väčšie to s väčšou smerodajnou odchýlkou $F_2^{(3)}$. Sakawa a Kubota [19] použili pre porovnanie fuzzy čísel $A = (a, b, c)$ tri kritéria.

$$F_1^{(4)}(A) = a(A), \quad \text{a} \quad F_2^{(4)}(A) = b, \quad \text{a} \quad F_3^{(4)}(A) = c - a.$$

Väčšie z dvoch fuzzy čísel je to, ktoré má väčšiu hodnotu $F_1^{(4)}$, v prípade zhody hodnôt $F_1^{(4)}$ je väčšie to s väčšou modálnou hodnotou $F_2^{(4)}$ a v prípade zhody hodnôt $F_1^{(4)}$ a $F_2^{(4)}$ je väčšie to s väčším nosičom $F_3^{(4)}$. Podľa Dvořáka [4] môžeme zoradiť fuzzy čísla jednoducho podľa troch jeho charakteristických hodnôt

$$F_1^{(5)}(A) = c, \quad \text{a} \quad F_2^{(5)}(A) = b, \quad \text{a} \quad F_3^{(5)}(A) = a$$

O zoradení fuzzy čísel rozhoduje prvé kritérium, v prípade ich rovnosti druhé a v prípade aj ich rovnosti rozhoduje o zoradení fuzzy čísel tretie kritérium. Nedostatkom lexicografického prístupu je dominancia prvého kritéria. Napríklad, A a B sú fuzzy čísla a platí $m(B) = m(A) + \epsilon$, kde ϵ je malé kladné číslo a

kde $w_1, w_2 \geq 0$.

Iný spôsob porovnania fuzzy čísel je založený na vypočítaní súradníc ťažiska $T = (\hat{x}, \hat{y})$ a porovnaní fuzzy čísel vzhľadom na hodnoty \hat{x}, \hat{y} alebo vzdialenosti ťažísk T od počiatku súradnicovej sústavy $(0, 0)$. Taktiež existujú rôzne modifikácie tejto metódy, ktorá sa označuje ako metóda porovnania indexov ťažiska alebo jednoducho ako centroidné metódy porovnania fuzzy čísel (angl. centroid index ranking methods).

Ako prvý prispel do metód porovnania fuzzy čísel s pojmom index ťažiska Yager v roku 1980 [21]. Vypočítal horizontálnu pozíciu ťažiska \hat{x}_A fuzzy čísla A a túto hodnotu použil ako index porovnania. Túto hodnotu spočítame ako

$$\hat{x}_A = \frac{\int_x w(x) \mu_A(x) dx}{\int_x \mu_A(x) dx}$$

kde $w(x)$ predstavuje funkciu váh významu hodnoty x . Pre $w(x) = x$ sa horizontálna súradnica ťažiska $T(A) = (\hat{x}_A, 0)$ stáva ťažiskom (COG). Čím je index \hat{x}_A väčší, tým je fuzzy číslo A hodnotené ako väčšie. Pre $w(x) = x$ definujeme Yagerov index ako

$$F^{(1)}(A) = \hat{x}_A = m(A)$$

Murakami a kol. v roku 1983 prezentovali horizontálne a vertikálne súradnice bodu ťažiska. Horizontálna súradnica \hat{x}_A je rovnaká ako pri Yagerovi. Čím je index \hat{x}_A a/alebo \hat{y}_A väčší, tým je fuzzy číslo A väčšie. Podľa Bortolan a Degani (1985) je logická iba voľba horizontálnej súradnice, pretože vertikálna hodnota je rovnaká pre všetky normálne trojuholníkové fuzzy čísla ($\hat{y} = 1/3$). Teda podľa Murakamiovho indexu sa na súradnicu \hat{x} pozeráme ako na hlavný index a na súradnicu \hat{y} pozeráme ako na pomocný index. Cheng v roku 1998 navrhol index vzdialenosti, ktorý je založený na oboch súradniciach ťažiska a môžeme ho definovať ako

$$F^{(7)}(A) = \sqrt{\hat{x}_A^2 + \hat{y}_A^2}$$

Horizontálna súradnica \hat{x}_A je totožná s Yagerom a Murakamiom a pre fuzzy číslo $A = (a, b, c)$ je vertikálna súradnica \hat{y}_A rovná

$$\hat{y}_A = \frac{(a+4b+c)}{3(a+2b+c)}$$

Pôvodná Chengova metóda je špecializovaná pre porovnanie lichobežníkových fuzzy čísel, ale môže byť taktiež aplikovaná na všeobecné fuzzy čísla, pokiaľ je ľavá a pravá funkcia príslušnosti invertabilná. Nevýhodou metódy je, že nevie porovnávať negatívne fuzzy čísla. Chu a Tsao navrhol v roku 2002 ako index porovnania plochu medzi bodom ťažiska $T_A = (\hat{x}_A, \hat{y}_A)$ a stredom súradnicovej sústavy $(0, 0)$, ktorú definoval ako

$$F^{(8)}(A) = \hat{x}_A \hat{y}_A$$

kde \hat{x}_A a \hat{y}_A je totožné s Chengom. Väčšia plocha reprezentuje väčšie fuzzy číslo. Chen a Chen v roku 2003 zistili, že Chengová (1998), Murakamiová a kol. (1983) a Yagerová (1980) metóda nevie v určitých situáciách porovnať rozdielne fuzzy čísla a taktiež nevedia spočítať poradie pre ostré hodnoty. Z tohoto dôvodu Chen a Chen odvodili novú metódu, založenú na súradniciach ťažiska $T = (\hat{x}, \hat{y})$ a smerodajnej odchýlke $s(A)$. Chen a Chenov index porovnania pre fuzzy čísla $A = (a, b, c)$ je definované ako

$$F^{(9)}(A) = \hat{x}_A + (1 - \hat{y}_A)^{s(A)}$$

kde horizontálna súradnica je rovná hodnote

$$\hat{x}_A = (2b\hat{y}_A + (c + a)(1 - \hat{y}_A))/2$$

a vertikálna súradnica je buď rovná hodnote

$\hat{y}_A = 1/3$ ak $a \neq c$ alebo $\hat{y}_A = 1/2$ ak $a = c$. Čím je hodnota $F^{(9)}(A)$ väčšia, tým je fuzzy číslo väčšie. Pôvodná Chen a Chenová metóda je špecializovaná pre porovnanie zovšeobecnených lichobežníkových fuzzy čísel. Liang a kol. predstavili v roku 2006 dva indexy a to index vzdialenosti, ktorý je podobný k Chengovmu indexu vzdialenosti a RV index. Horizontálna súradnica je rovnaká ako u Chenga a vertikálna súradnica je

rovná hodnote $\hat{y}_A = 1/3$. RV index definujeme ako

$$F_1^{(10)}(A) = \sqrt{\hat{x}_A^2 + \hat{y}_A^2} \quad \text{a} \quad F_2^{(10)}(A) = \frac{\sigma(A)_R}{R}$$

kde R je index vzdialenosti a pre fuzzy číslo $A = (a, b, c)$ platí

$$\sigma(A)_R = \sqrt{\sigma_x(A)^2 + \sigma_y(A)^2}$$

kde

$$\sigma_x(A) = s(A) \quad \text{a} \quad \sigma_y(A) = \frac{\sqrt{2(c-a)^2}}{6(c-a)}$$

Pre index vzdialenosti platí, že čím je väčší, tým je fuzzy číslo väčšie a pre RV index platí, že čím je menší, tým je fuzzy číslo väčšie. Navyše Liang a kol. ukázali ako voliť hlavný a pomocný index. Pre fuzzy čísla, ktoré sú obe normálne je potreba voliť RV index ako hlavný index a index vzdialenosti ako pomocný index. Túto metódu môžeme zaradiť ako medzi centroidné metódy, tak aj medzi lexikografické metódy. asledujúca sekcia formuluje dispečerské prioritné pravidlá a popisuje algoritmické kroky dispečerských prioritných pravidiel RPT, SPT a LPT.

4. Dispečerské prioritné pravidlá

Technika dispečerských prioritných pravidiel² bola jedna z prvých techník, ktorá sa použila na riešenie problému identických paralelných strojov. Jej výhody spočívajú v ľahkej implementácii a v polynomiálnom čase riešenia úlohy. Princíp metódy spočíva v tom, že v každom kroku pridáme nerozvrhnutým operáciám prioritu a operácia s najväčšou prioritou sa pridá do rozvrhu. O dispečerských prioritných pravidlách pojednávajú napr. Pinedo [17], Palúch [15] a Mičunek [13]. Najznámejšími prioritnými dispečerskými pravidlami, ktoré sa používajú na pridelovanie úloh k identickým paralelným strojom, sú:

Pravidlo	Popis dispečerského pravidla
RPT	(random processing time first) priorita je úlohám pridelená náhodne;
LPT	(longest processing time first) úloha s väčším časom spracovania má väčšiu prioritu;
WLPT	(weighted longest processing time first) úloha s váženým väčším časom spracovania má väčšiu prioritu;
LRPT	(largest remaining processing time first) úloha so zostávajúcim väčším časom spracovania má väčšiu prioritu;
SPT	(shortest processing time first) úloha s menším časom spracovania má väčšiu prioritu;
WSPT	(weighted shortest processing time first) úloha s váženým menším časom spracovania má väčšiu prioritu;
SRPT	(shortest remaining processing time first) úloha so zostávajúcim menším časom spracovania má väčšiu prioritu;
FCFS	(first come first serve) úloha ktorá príde prvá, bude spracovaná prvá.

Nasledujúci algoritmus popisuje algoritmické kroky dispečerského prioritného pravidla RPT (random processing time first).

Algoritmus: Dispečerské prioritné pravidlo RPT

1. Krok Inicializácia

- Poradie úloh vytvoríme náhodne

2. Krok Pridelovanie úloh

- V tomto poradí priradujeme úlohy strojom \mathcal{M} , ktoré sa najskôr uvoľnia.

Nech π je permutácia množiny $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$. Nasledujúci algoritmus popisuje algoritmické kroky dispečerského prioritného pravidla LPT (longest processing time first).

Algoritmus: Dispečerské prioritné pravidlo LPT

1. Krok Inicializácia

- Vytvoríme poradie úloh

$$P_{\pi(1)} \geq P_{\pi(2)} \geq \dots \geq P_{\pi(n)} \quad (1)$$

2. Krok Pridelovanie úloh

- V tomto poradí priradujeme úlohy strojom \mathcal{M} , ktoré sa najskôr uvoľnia.

Dôležitou vlastnosťou dispečerského prioritného pravidla LPT je, že zrovnomerňuje pracovné výkony strojov. Nasledujúci algoritmus popisuje algoritmické kroky dispečerského prioritného pravidla SPT (shortest processing time first).

Algoritmus: Dispečerské prioritné pravidlo SPT

1. Krok Inicializácia

- Vytvoríme poradie úloh

$$P_{\pi(1)} \leq P_{\pi(2)} \leq \dots \leq P_{\pi(n)} \quad (1)$$

2. Krok Pridelovanie úloh

- V tomto poradí priradujeme úlohy strojom \mathcal{M} , ktoré sa najskôr uvoľnia.

Priradovanie priorít (1) a (2) úlohám robíme na základe porovnania časov spracovania všetkých úloh a to za pomoci metód porovnania fuzzy čísel. Nasledujúca sekcia aplikuje získané poznatky predošlých sekcií na probléme rozvrhovania identických paralelných strojov.

5. Identické paralelné stroje

Rozvrhovanie je optimálna alokácia/priradenie strojov množine úloh v čase. Nech $\mathcal{M} = \{M_1, M_2, \dots, M_m\}$ je množina identických paralelných strojov a nech $\mathcal{J} = \{J_1, J_2, \dots, J_n\}$ je množina úloh, kde m, n sú kladné celé čísla. Podľa Graham a kol. [8] môžeme takýto systém klasifikovať ako $P_m || f$, kde f je miera nerovnomernosti. Rozvrhovanie je obmedzované viacerými predpismi a pravidlami pomocou nasledujúcich ťažkých podmienok:

- (h1) Každý stroj v jednom časovom okamžiku môže vykonávať nanajvýš jednu úlohu
- (h2) Každú úlohu v jednom časovom okamžiku môže spracovať nanajvýš jeden stroj
- (h3) Každú úlohu nie je možné pri jej spracovávaní prerušiť.
- (h4) Každá úloha je k dispozícii pre spracovanie už v čase 0.
- (h5) Nezáleží na poradí spracovania úloh, t.j. neexistuje precedenčná relácia medzi úlohami.

Nazývajú sa ťažkými podmienkami, pretože sa pri vytváraní rozvrhu nesmú porušiť. Ďalej je dobrý rozvrh charakterizovaný ľahkými podmienkami. V našom prípade ide o jednu ľahkú podmienku, a to zrovnomerňovanie celkových kumulovaných pracovných časov strojov, čo môžeme taktiež formulovať ako minimalizáciu miery nerovnomernosti f . V ľahkých podmienkach sú zahrnuté ciele rozvrhovania a tie optimalizujeme.

Fuzzy čas spracovania úlohy J_k budeme značiť ako $p_k = (p_k^a, p_k^b, p_k^c) \in \mathcal{H}(N)$, pre všetky $k \in \mathcal{J}$. Doba spracovania p_k úlohy J_k je na všetkých strojoch rovnaká.

6. Experimentálne porovnanie

Najskôr vygenerujeme množinu fuzzy čísel, ktorých pravá hodnota je menšia alebo rovná hodnote h . Tieto fuzzy čísla chceme použiť na modelovanie fuzzy časov spracovania úloh. Definujeme ju ako