Portál pre odborné publikovanie ISSN 1338-0087

Vyšetření stability mnohorozměrových diskrétních systémů v souvislosti s GPC prediktivním řízením

Barot Tomáš · Elektrotechnika

08.08.2012

Většina odborné literatury o GPC (Generalized Predictive Control) prediktivním řízení poukazuje na výhodu práce i s nestabilními systémy, a to pokud je jejich matematický popis na bázi přenosové funkce. Tento článek má informativní charakter v tom, že pod uvedením faktu o nestabilitách je třeba hledat vyšší souvislosti a detaily než může čtenář v danou chvíli uvažovat. Ani v běžně dostupné anglicky psané literatuře oblast spjatou s nestabilitou modelu v GPC řízení lehce nenajdeme. V této práci je proto i demonstrativní ukázka neúspěšného řízení nestabilního systému klasickým obvodem GPC.

Její uvedení souvisí se situací, kdyby čtenář nedbal vyšší pozornosti při studiu dané oblasti a použil klasické zpětnovazební zapojení bez jakýchkoliv dalších modifikací, které však již nelze lehce nastudovat. Proto je jednodušším řešením prevence vyšetřením stability před návrhem samotného GPC řídicího algoritmu, o čemž pojednává druhá polovina článku s cílem zpřehlednit dostupné způsoby prokazování stability u mnohorozměrových systémů.

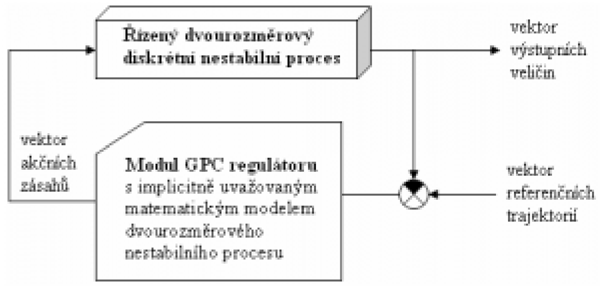
Vybraný příklad neřiditelnosti nestabilního systému zpětnovazebním GPC řízením

Prediktivní řízení nestabilních objektů založených na modelu přenosové funkce je dosti komplikované, a proto zde nebude samotné řešení takového řízení uváděno. Neboť není informačně k sehnání ani v dostupných anglicky psaných knihách o GPC řízení. Byl vybrán příkladově nestabilní dvourozměrový model procesu (1) pro demonstraci, že klasickým zpětnovazebním GPC řízením, jehož schéma jsem uvedl v předchozím článku v tomto odborném časopisu [1], tak jednoduše řízení provést nelze.

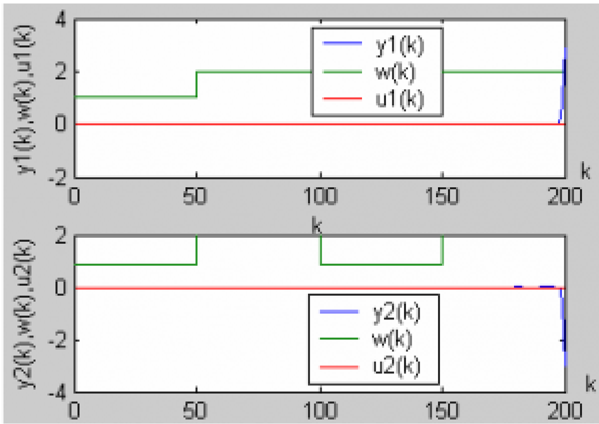
Modulární schéma je uvedeno na (Obr.1). Vypořádání se s uváděným problémem může být spatřeno v prevenci vyšetření stability systému před jeho zapojením do GPC řízení. Graf ukázky neřiditelnosti nestabilního reprezentanta (1) je na (Obr.2). Pro stabilní systémy je řízení bezproblémové (Obr.3).

$$\overline{G}(z^{-1}) = \left[\begin{array}{c} \frac{z^{-2}+8z^{-3}-14z^{-4}}{1-4z^{-1}-19z^{-2}+102z^{-3}-120z^{-4}} \\ \frac{2z^{-2}+0.33z^{-3}+48z^{-4}}{1-4z^{-1}-19z^{-2}+102z^{-3}-120z^{-4}} \end{array} \right.$$

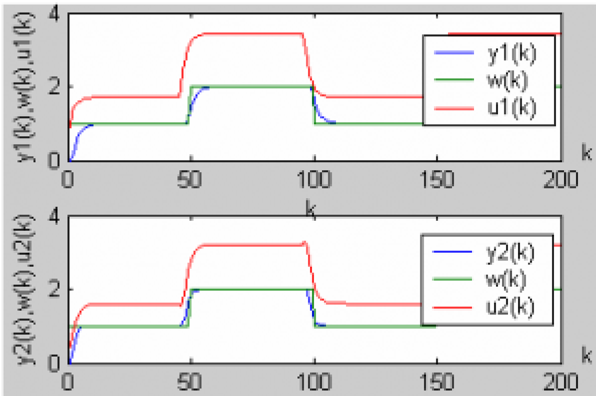
$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{-z^{-2}+4z^{-3}-44z^{-4}}{1-4z^{-1}-19z^{-2}+102z^{-3}-120z^{-4}} \\ \dfrac{42z^{-2}-24.33z^{-3}-8z^{-4}}{1-4z^{-1}-19z^{-2}+102z^{-3}-120z^{-4}} \end{array}\right] \qquad (1)$$



Obr.1 Schéma zpětnovazebního GPC řízení nestabilního procesu v modulárním pojetí



Obr.2 Graf demonstrace neřiditelnosti vybraného nestabilního mnohorozměrného systému (1)

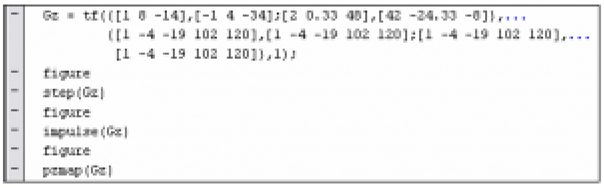


Obr.3 Doplňkový graf demonstrace případu úspěšného řízení stabilního systému

Šetření stability mnohorozměrových systémů v programovém prostředí MATLAB

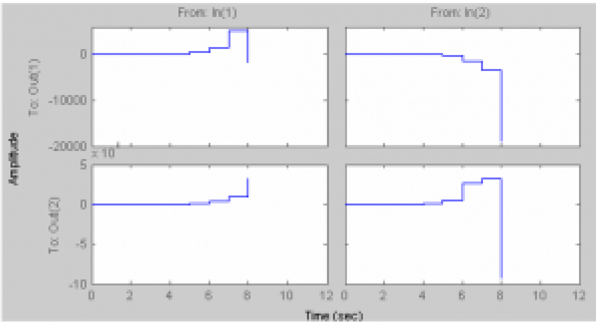
Pokud máme systém charakterizován matematickým modelem, lze úspěšně prokazovat jeho stabilitu v programu MATLAB. Tato část článku se snaží napomoci ve způsobu, jak takový program realizovat. Uvedený kód (Obr.4) je pro výše uvedený příklad (1), kdy dvourozměrový systém je popsán přenosovou maticí z racionálně lomených funkcí v komplexní proměnné z, a to s operátory zpětné diference v Z-transformaci. Prostředí MATLAB nám umožňuje pracovat velmi elegantně právě i s mnohorozměrovými variantami systémů. Podobným způsobem jako v jednorozměrném případě (viz. odborná literatura [2]) lze s určitými modifikacemi v programovém kódu analyzovat vlastnosti vícerozměrových objektů.

Příkaz *tf* nám umožňuje nadefinovat přenosovou matici systému, a to tak, že v první složené závorce definujeme polynomy čitatelů dílčích prvků matice a ve druhé zbývající jmenovatele. Analýzu systému provedeme klasicky příkazy *step, impulse, pzmap*. Příkaz step vykreslí pro systém přechodové charakteristiky, jenž dle (Obr. 5) pro náš systém (1) vykazují nestabilitu. Impulsní funkce jsou další možností analýzy a v neposlední řadě též vykreslení pólů a nul (Obr.6), kde póly pro nestabilní systém leží mimo jednotkovou kružnici v komplexní rovině.

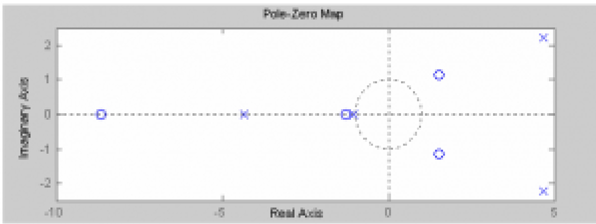


```
Gz = tf({[1 8 -14],[-1 4 -34];[2 0.33 48],[42 -24.33 -8]},...
        {[1 -4 -19 102 120],[1 -4 -19 102 120];[1 -4 -19 102 120],...
         [1 -4 -19 102 120]},1);
figure
step(Gz)
figure
impulse(Gz)
figure
pzmap(Gz)
```

Obr.4 Programový kód určený pro analýzu mnohorozměrového systému (1) v MATLABu



Obr.5 Přechodové charakteristiky mnohorozměrového nestabilního systému (1)



Obr.6 Vykreslení pólů a nul pro nestabilní mnohorozměrový systém (1) s póly vně jednotkové kružnice (charakteristické pro nestabilní diskrétní systém)

Podstata určení stability mnohorozměrových diskrétních systémů

V souvislosti s grafy uvedenými výše, které jsou výsledky analýzy chování mnohorozměrového systému s ohledem na jeho stabilitu, byly již lehce naznačeny souvislosti stability s póly systému. Póly mnohorozměrového systému jsou kořeny polynomu ve jmenovateli prvků přenosové matice. Pokud leží mimo oblast jednotkové kružnice v komplexní rovině, jedná se o nestabilní systém. Z grafu (Obr.6) je patrné, že všechny póly nestabilního systému (1) leží mimo tuto oblast. Pro kontrolu lze též póly určit v MATLABu analýzou konkrétního polynomu (2) ve jmenovatelích prvků přenosové matice (1). A to konkrétně příkazem pro nalezení kořenů polynomu roots. Kořeny jsou (3)-(6) s absolutními hodnotami (7)-(10). Absolutní hodnoty skutečně převyšují velikost poloměru jednotkové kružnice v komplexní rovině.

$$1 - 4z^{-1} - 19z^{-2} + 102z^{-3} + 120z^{-4} \quad (2)$$

kořen (výraz č.)	abs. hodnota kořene (výraz č.)
4.6840 + 2.2073*i* (3)	5.1780 (7)
4.6840 - 2.2073*i* (4)	5.1780 (8)
-4.3358 (5)	4.3358 (9)
-1.0322 (6)	1.0322 (10)

Obr.7 Určené kořeny polynomu a jejich absolutní hodnoty větší než jedna

V odborné literatuře [2]-[5], kde je pojednáno o stabilitě systémů podrobněji, je polynom ve jmenovateli označován konkrétně charakteristickým polynomem. Položen roven nule je poté tzv. charakteristickou rovnicí, ze které algebraicky určujeme samotné kořeny. Pokud vyjádříme přenosovou matici v detailnější podobě (11) a určíme inverzi matice A, získáme touto maticovou operací zlomek rovný obrácené hodnotě determinantu této matice. Samotný determinant je ve své podstatě charakteristický polynom, který je jmenovatelem všech racionálně lomených prvků přenosové matice mnohorozměrového systému.

Pro stavový popis je situace ve stejném duchu, kdy ale póly jsou stanoveny jako vlastní čísla matice systému F, neboli kořeny charakteristického polynomu daného determinantem (12). Jednotková matice I je ve vztahu (12) násobená komplexní proměnou z, v literatuře uváděnou v kladných mocninách. Převod na záporné mocniny proměnné z lze učinit vydělení polynomů mocninou z v nejvyšším nacházejícím se původním exponentu. Zápis je poté ekvivalentním.

$$\overline{G}(z^{-1}) = \overline{A}^{-1}(z^{-1}).\overline{B}(z^{-1}) = \frac{1}{det\overline{A}(z^{-1})}.adj(\overline{A}(z^{-1})).\overline{B}(z^{-1}) \quad (11)$$

$$det(z.\overline{I} - \overline{F}) \quad (12)$$

Vybraná algebraická kritéria pro určení stability mnohorozměrových systémů

Pro diskrétní systémy můžeme použít algebraická kritéria známá ze spojitých systémů (např. Routh-Schurovo, Hurwitzovo) [5][7], avšak jen tehdy, pokud na charakteristický polynom v proměnné z aplikujeme bilineární transformaci dle vztahu (13).

$$z = \frac{w+1}{w-1} \quad (13)$$

Pro diskrétní systémy můžeme použít též přímo určené Juryho algebraické kritérium stability (dle zdroje [6]). Analogicky se podobá Routh-Schurovu kritériu ze spojitých systémů. K aplikaci Juryho kritéria už není třeba bilineární transformace, aplikuje se tudíž přímo na charakteristický polynom systému, u něhož stabilitu vyšetřujeme. Na rozdíl od algoritmu Routh-Schurova kritéria se redukuje řádek soustavy koeficientů zleva a druhý se opíše v obráceném pořadí. Pokud je poslední jediný koeficient kladný, pak je systém stabilní.

Algebraické prošetření stability u konkrétně řešeného nestabilního systému v článku

Pro charakteristický polynom (2) konkrétního vyšetřovaného reprezentanta nestabilního systému (1) je analytické testování na stabilitu uvedeno na následujícím řešení. Vztahy (15) až (18) a schéma (Obr.8) vyjadřují postup spojitým Routh-Schurovým kritériem po předchozí aplikaci bilineární transformace na charakteristický polynom. Schéma (Obr.9) patří postupu Juryho kritéria.

Charakteristický polynom (2) je pro kritéria převeden do analogického tvaru (14) s kladnými mocninami proměnné z. Obě kritéria vyhodnotila mnohorozměrový systém správně za nestabilní.

$$z^4 - 4z^3 - 19z^2 + 102z + 120 \tag{14}$$

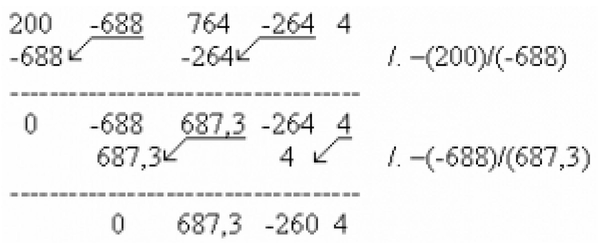
Routh-Schurovo kritérium:

$$z^4 - 4z^3 - 19z^2 + 102z + 120 = 0 \tag{15}$$

$$\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^4 - 4\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^3 - 19\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2 + 102\left(\frac{w+1}{w-1}\right) + 120 = 0 \tag{16}$$

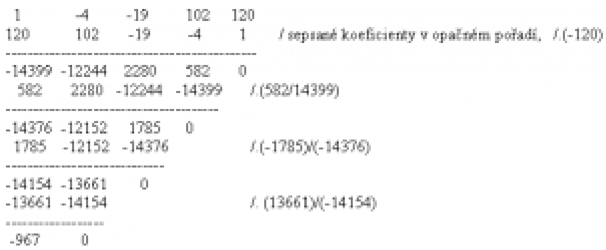
$$\begin{aligned}(w+1)^4 - 4(w+1)^3(w-1) - 19(w+1)^2(w-1)^2 + \\ +102(w+1)(w-1)^3 + 120(w-1)^4 = 0\end{aligned} \tag{17}$$

$$200w^4 - 688w^3 + 764w^2 - 264w + 4 = 0 \tag{18}$$



Obr.8 Routh-Schurovo kritérium po bilineární transformaci pro systém (1)

Poslední koeficienty schématu (Obr.8) nejsou všechny kladné, a proto je systém nestabilní. Juryho kritérium:



Obr.9 Juryho kritérium pro vyšetření systému (1) na jeho stabilitu

Neboť je poslední koeficient ve schématu Juryho algebraického kritéria záporný, není charakteristický polynom stabilní a tudíž je i systém nestabilní.

Závěr

V předkládaném článku jsou uvedeny možnosti práce s nestabilními mnohorozměrovými diskrétními systémy při GPC prediktivním řízení. Dle dostupných zdrojů odborné oblasti GPC lze najít kladná hodnocení při zvládání řízení nestabilit. Konkrétní postupy však lze těžko najít i v dostupné zahraniční literatuře. Proto zde navrhuji volit cestu menšího odporu, a to vyvarovat se nestabilním systémům při návrhu a řízení GPC algoritmem. Klasickým zpětnovazebním zapojením regulačního obvodu, uváděným též nejčastěji v knihách, konkrétní nestabilní systém (1) řídit nelze. Aby bylo takový systém možné řídit, jak uvádí odborné prameny, je třeba buď systém modifikovat nebo upravit interní vztahy a zákonitosti.

Doporučuji proto pohlížet na informaci o možnosti řízení i nestabilních procesů s tím, že je třeba složitějších úprav klasického algoritmu prediktivního řízení. Druhá polovina článku poukazuje na testování právě nestabilních systémů, a to softwarovým i analytickým způsobem. Pokud před vlastním řízením otestujeme systém na jeho stabilitu, nebude s ním dále žádný problém. Excelentní analýzu stability podává prostředí MATLAB, kde interpretace grafů a výsledků závisí již na porozumění problematice teorie systémů. Proto jsou kromě grafických reportů s jejich vysvětlením vyzdvižena též algebraická kritéria, jenž dokáží stabilitu potvrdit nebo vyvrátit analytickou cestou.

Poděkování

Článek byl uskutečněn za finanční podpory IGA Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně, Fakulty aplikované informatiky číslo IGA/FAI/2012004.

Použitá odborná literatura

1. BAROT, T., KUBALČÍK, M. Studium závislosti výpočetního času algoritmu GPC prediktivního řízení na volbě typu popisu matematického modelu v regulátoru. POSTERUS.sk, portál pre odborné publikovanie, 2012, ISSN 1338-0087.
2. PROKOP, R, MATUŠŮ, R., PROKOPOVÁ, Z. Teorie automatického řízení – lineární spojité dynamické systémy. 1.vyd. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, Fakulta aplikované informatiky, 2006. 102 s. ISBN 80-7318-369-2.
3. STREJC, Vladimír. Stavová teorie lineárního diskrétního řízení. 1. vyd. Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1978. 376 s.
4. KUČERA, Vladimír. Analysis and Design of Discrete Linear Control Systems. 1.vyd. Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1991. 480 s. ISBN 80-200-0252-9.
5. BALÁTĚ, Jaroslav. Automatické řízení. 1.vyd. Praha: Nakladatelství BEN – technická literatura, 2003. 664 s. ISBN 80-7300-020-2.
6. Jury stability – Wikipedia, the free encyclopedia [online]. [cit. 2012-07-28]. Dostupné z: http://en.wikipedia.org/wiki/Jury_stability_criterion
7. VAŠEK, Vladimír. Teorie automatického řízení II. 1. vyd. Brno: Rektorát Vysokého učení technického v Brně, 1990. 139 s. ISBN 80-214-0115-X.