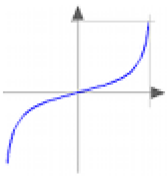
Portál pre odborné publikovanie ISSN 1338-0087

Tabuľková metóda určovania koeficientov Mac-Laurinovho radu pre funkciu tangens

Milly Miron · Prírodné vedy

12.11.2012



Príspevok popisuje princíp presnej a rýchlej metódy určovania koeficientov MacLaurinovho radu pre funkciu tangens pomocou číselnej tabuľky usporiadanej do riadkov a stĺpcov, a to podobným postupom, akým sa určujú koeficienty Binomického radu pomocou Pascalovho trojuholníka.

1. Úvod

Nech je daná reálna funkcia y = f(x) definovaná na množine reálnych čísel R . Nech táto funkcia má v bode x = 0 hodnoty y0 = f(0) . Nech v tomto bode x = 0 má daná funkcia y = f(x) aj hodnoty všetkých derivácií v označení:

$$y_0^{(1)} = f^{(1)}(0),\, y_0^{(2)} = f^{(2)}(0),\, y_0^{(3)} = f^{(3)}(0),\, \ldots,\, y_0^{(n)} = f^{(n)}(0), \ldots$$

Pre rozvoj funkcie y = f (x) do MacLaurinovho radu platí známy vzorec:

$$y = f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

pričom:

$$y_0 = y_0^{(0)} = f^{(0)}(0) = f(0),\ 0! = 1,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Rozvoj nami požadovanej funkcie y=tg(x) má podľa [2] tvar:

$$y = tg(x) = 1.x^1 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \ldots$$

V ďalšom zaveďme vyjadrenie 1. derivácie funkcie y = f(x) ako funkciu závisle premennej y v tvare: $y^{(1)} = dy/dx = z(y)$, pričom pre funkciu y = f(x) sa budeme pridržiavať označenia: $y^{(0)} = y = f(x)$, čo po formálnej stránke predstavuje deriváciu nultého rádu. Potom derivácie vyšších rádov $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $y^{(3)}$, … , $y^{(n)}$, … danej funkcie y = f(x) možno vyjadriť aj takto:

$$y^{(1)} = \frac{d}{dx}\left[y^{(0)}\right] = \frac{d}{dy}\left[y^{(0)}\right]\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dy}\frac{dy}{dx} = 1.z(y)$$

$$y^{(2)} = \frac{d}{dx}\left[y^{(1)}\right] = \frac{d}{dy}\left[y^{(1)}\right]\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy}\left[y^{(1)}\right]z(y)$$

…

$$y^{(n)} = \frac{d}{dx}\left[y^{(n-1)}\right] = \frac{d}{dy}\left[y^{(n-1)}\right]\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy}\left[y^{(n-1)}\right]z(y)$$

2. Popis metódy

Reálna funkcia y=tg(x) je periodická funkcia, ktorej jedna časť je definovaná v intervale -(π/2) < x < (π/2). Pre 1. deriváciu funkcie y=tg(x) platia vzťahy:

$$y^{(1)} = 1/cos^2(x) = 1 + tg^2(y) = 1 + y^2 = z(y)$$

V zmysle už spomenutého postupu vyjadrenia derivácie nultého rádu $y^{(0)}$ = y = f(x) a vyšších rádov $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $y^{(3)}$, … , $y^{(n)}$, … danej funkcie y = f(x) pomocou funkcie $y^{(1)}$ = dy/dx = z(y) možno pre funkciu y=tg(x) vypočítať jej vyššie derivácie celkom jednoduchým spôsobom:

$$y^{(0)} = f(x) = 1.y$$

$$y^{(1)} = 1(1 + y^2) = 1 + 1.y^2$$

$$y^{(2)} = 2^1 y(1 + y^2) = 2(y + y^3)$$

$$y^{(3)} = 2^1(1 + 3y^2)(1 + y^2) = 2(y + y^3)$$

$$y^{(4)} = 2^3(2y + 3y^3)(1 + y^2) = 2^3(2y + 5y^3 + 3y^5)$$

$$y^{(5)} = 2^3(2 + 15y^2 + 15y^4)(1 + y^2) = 2^3(2 + 17y^2 + 30y^4 + 15y^6)$$

$$y^{(6)} = 2^4(17y + 60y^3 + 45y^5)(1 + y^2) = 2^4(17y + 77y^3 + 105y^5 + 45y^7)$$

…

$$y^{(12)} = 2^{10}(21944y + 302575y^3 + 140240y^5 + 3075930y^7 + \\ + 3513510y^9 + 2027025y^{11} + 467775y^{13}$$

$$y^{(13)} = 2^{10}(21944 + 929569y^2 + 7919739y^4 + 28543515y^6 + \\ + 53153100y^8 + 53918865y^{10} + 28378350y^{12} + 6081075y^{14}$$

Všimnime si, že posledný koeficient polynómu $y^{(n)}$ pri mocnine y^{n+1} má hodnotu faktoriálu (n!). Pre overenie správnosti vypočítajme koeficienty polynómov $y^{(9)}$ a $y^{(13)}$ pri mocninách y^9 a y^{13}:

$$9! = 9.(2^3).7.(3.2).5.(2^2).3.2.1 = [9.7.3.5.3.2^7] = 2835.2^7$$

$$13! = 13.(3.2^3).11.(5.2).[9!] = 13.3.11.5.[9!].2^{1-} = 6081075.2^{10}$$

Na základe vyjadrení derivácií nultého rádu a vyšších rádov $y^{(0)}$, $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $y^{(3)}$, … , $y^{(n)}$, … danej funkcie y = f(x) pomocou funkcie $y^{(1)}$ = dy/dx = z(y) zostavme pre funkciu y=tg(x) číselnú schému (tabuľku) koeficientov polynómov pri mocninách y^0, y^1, y^2, y^3, … , y^n, … (usporiadame ich do stĺpcov), a to pre príslušné rády ich derivácií $y^{(0)}$, $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $y^{(3)}$, … , $y^{(n)}$, … (usporiadame ich do riadkov), pričom $y^{(0)}$=y=f(x).

Tab. 1. Číselná tabuľka koeficientov polynómov $y^{(n)}$ pri ich mocninách y^0, y^1, y^2, y^3, ...

	0	y^0	y^1	y^2	y^3	y^4	y^5	y^6	y^7	y^8	y^9	y^{10}	y^{11}	y^{12}	y^{13}
$y^{(0)}$	0	0	**0!** = 1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$y^{(1)}$	0	**1**	0	**1!**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$y^{(2)}$	0	0	$1 . 2^1$	0	**2!**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$y^{(3)}$	0	$\mathbf{1 . 2^1}$	0	$4 . 2^1$	0	**3!**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$y^{(4)}$	0	0	$2 . 2^3$	0	$5 . 2^3$	0	**4!**	0	0	0	0	0	0	0	0
$y^{(5)}$	0	$\mathbf{2 . 2^3}$	0	$17 . 2^3$	0	$30 . 2^3$	0	**5!**	0	0	0	0	0	0	0
$y^{(6)}$	0	0	$17 . 2^4$	0	$77 . 2^4$	0	$105 .2^4$	0	**6!**	0	0	0	0	0	0
$y^{(7)}$	0	$\mathbf{17} .2^4$	0	$248 .2^4$	0	$756 .2^4$	0	840.2^4	0	**7!**	0	0	0	0	0
$y^{(8)}$	0	0	$62 . 2^7$	0	$440 .2^7$	0	1008.2^7	0	...	0	**8!**	0	0	0	0
$y^{(9)}$	0	$\mathbf{62} .2^7$	0	1382.2^7	0	6360.2^7	0	...	0	...	0	**9!**	0	0	0
$y^{(10)}$	0	0	1382.2^8	0	14102.2^8	0	...	0	...	0	...	0	**10!**	0	0
$y^{(11)}$	0	$\mathbf{1382}.2^8$	0	43688.2^8	0	...	0	...	0	...	0	...	0	**11!**	0
$y^{(12)}$	0	0	21844.2^{10}	0	...	0	...	0	...	0	...	0	...	0	**12!**
$y^{(13)}$	0	$\mathbf{21844}.2^{10}$	0	...	0	...	0	...	0	...	0	...	0	...	0

Analýzou takto získanej číselnej schémy možno zistiť, že v nej existujú isté zákonitosti, na základe ktorých možno určiť číselné hodnoty v dvoch za sebou nasledujúcich riadkoch, a to podobným postupom, akým sa určujú koeficienty Binomického radu pomocou známeho Pascalovho trojuholníka. Uveďme konkrétne príklady:

- Konkrétne číslo 2, prislúchajúce riadku a stĺpcu [$y^{(2)}$, y^1], možno určiť ako súčet dvoch čísel umiestnených nad riadkom $y^{(2)}$ po jeho oboch stranách (teda v riadku $y^{(1)}$), vynásobených rádmi príslušných stĺpcov (teda rádmi stĺpcov y^0, y^2):

$$[y^{(2)}, y^1] = 0.[y^{(1)}, y^1] + 2.[y^{(1)}, y^2] = 0.1 + 2.1! = 2$$

- Konkrétne číslo 2, prislúchajúce riadku a stĺpcu:

$$[y^{(3)}, y^0] = 0.[y^{(2)}, 0] + 1.[y^{(2)}, y^1] = 0 + 1.2 = 2$$

pričom stĺpec 0, (vľavo od stĺpca y^0) má nulové hodnoty koeficientov.

- Konkrétne číslo 6, prislúchajúce riadku a stĺpcu:

$$[y^{(3)}, y^4] = 3.[y^{(2)}, y^3] + 5.[y^{(2)}, y^5] = 3.2! + 5.0 = 3! = 6$$

- Konkrétne číslo 8, prislúchajúce riadku a stĺpcu:

$$[y^{(3)}, y^2] = 1.[y^{(2)}, y^1] + 3.[y^{(2)}, y^3] = 1.2 + 3.2! = 2 + 6 = 8$$

Ľahko sa možno presvedčiť, že horeuvedený algoritmus platí aj pre určovanie nulových hodnôt v riadkoch a stĺpcoch: [$y^{(1)}$, y^1] , [$y^{(2)}$, y^0], [$y^{(2)}$, y^2] , [$y^{(3)}$, y^1] , [$y^{(3)}$, y^3] , ... , atd.

Výhodou uvedeného algoritmu určovania koeficientov pri mocninách y^0, y^1, y^2, y^3, ... , y^n, ... je skutočnosť, že pre určenie koeficientu, ktorý prislúcha riadku a stĺpcu [$y^{(2n+1)}$, y^0] stačí poznať hodnoty koeficientov polynómov, ktoré prislúchajú riadku y(n). Tak napríklad pre určenie koeficientu v riadku a stĺpci: [$y^{(13)}$, y^0] = 21844.2^8 stačí poznať koeficienty polynómov, ktoré prislúchajú riadku (polynómu) $y^{(6)}$:

$$y^{(6)} = 2^4.(17y + 77.y^3 + 105.y^5 + 45.y^7)$$

Koeficient $y^{(13)}(0)/13!$ MacLaurinovho radu pri mocnine x^{13} možno určiť aj z polynómu $y^{(13)}=2^{10}.21844.y^0 + \ldots + 13!.y^{14}$ ako podiel koeficientu s hodnotou $y^{(13)}=2^{10}.21844$ pri mocnine y^0 a koeficientu s hodnotou 13! pri mocnine y^{14}. V obecnom prípade možno vysloviť tvrdenie, že hodnota koeficientu $y^{(2n+1)}(0)/(2n+1)!$ pri mocnine $x^{(2n+1)}$ MacLaurinovho radu pre funkciu y=tg(x) je určená podielom koeficientu pri ráde y^0 a príslušnej hodnote faktoriálu [(2n +1)!]. Na základe uvedeného MacLaurinov rad funkcie y=tg(x) má tvar:

$$y = tg(x) = 1.x^1 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \frac{1382}{155925}x^{11} + \ldots$$

3. Záver

Účelom predkladaného príspevku bolo prezentovať doposiaľ novú metódu presného a rýchleho postupu určovania koeficientov MacLaurinovho radu pre funkciu y=tg(x). Spomínaná tabuľková metóda umožňuje bez zložitých výpočtov určovať jeho koeficienty na základe veľmi jednoduchého algoritmu zostaveného do číselnej schémy v podobe tabuľky, a to až do vysokých rádov mocnín x^n. Pripomíname však, že uvedená metóda nemá širšie využitie pre obecné funkcie y=f(x).

Literatúra

1. Grega, A.– Kluvanec, D.–Rajčan, E.: Matematika pre fyzikov. SPN, Bratislava 1974.
2. Bronštejn, I.N.– Semenďajev, K.A: Príručka matematiky pre inžinierov a pre študujúcich (preklad 8. ruského vydania – 3. slovenské vydanie), SVTL, Bratislava 1964.
3. Göhler, W.–Ralle, B.: Lexikón vyššej matematiky – vzorce. ALFA, Bratislava 1964.