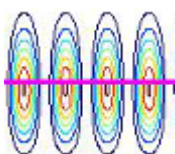


Spojité waveletová transformácia a jej aplikácie

Zavacký Jozef · Elektrotechnika

13.07.2015



Fourierova transformácia a jej nástroje sú úspešne aplikované v mnohých vedeckých oblastiach. Avšak, pomocou Fourierovej transformácie nie je možné analyzovať nestacionárne a prerušované signály súčasne v časovo-frekvenčnej rovine. Waveletová transformácia, ktorá bola v poslednej dobe objavená sa vysporiadala s obmedzeniami Fourierovej transformácie. Je to integrálna transformácia s jadrom, ktoré je odvodené z materského waveletu posunutím v čase a časovou kompresiou a dilatáciou. V tomto článku sú prezentované základy spojitej waveletovej transformácie spolu s jej hlavnými vlastnosťami a algoritmus výpočtu tejto transformácie. Následne sú uvedené typické príklady tejto transformácie pre vybrané signály.

1. Úvod

Na konci minulého storočia vznikol a v súčasnosti sa úspešne rozvíja nový a dôležitý smer v teórii a technike spracovania signálov, obrazov, a časových radov, ktorý sa nazýva waveletová transformácia (WT). Prvý "wavelet" navrhol matematik A. Haar už v roku 1910 pri konštrukcii alternatívneho ortonormálneho systému k Fourierovmu [1]. Waveletova transformácia bola zavedená v polovici osemdesiatych rokov minulého storočia Morletom, Grossmanom a Mayerom, kedy bola použitá pri analýze vlastností seizmických a akustických signálov [2]. Exaktný matematický rámec bol postavený na myšlienke základného waveletu (wavelet- "malá vlnka", "ondelette") Francúzskou školou [2], [3] a je zdokumentovaný v Mayerovej knihe s názvom "Ondeletts" [4].

Ich práca poslúžila ako začiatok intenzívneho výskumu waveletov v nasledujúcom desaťročí radom vedcov takých, ako Dobečiesová, I., Mallat, S.G., Vetterli, M., Sweldens, W. Farge, G., Chui, C.K. a ďalším. Waveletová transformácia je obzvlášť zaujímavá pre analýzu nestacionárnych signálov, pretože je alternatívou krátkodobej Fourierovej transformácie (Short-Time Fourier Transform) resp. Gaborovej transformácie [5-6]. Je tiež vo vzťahu s časovo-frekvenčnou analýzou založenou na Wigner-Willieho distribúcií [7-8]. WT signálov je zovšeobecnením spektrálnej analýzy vo vzťahu k Fourierovej aj krátkodobej Fourierovej transformácii. Využíva základné waveletové funkcie (wavelety resp. materské wavelety), ktoré môžu byť dilatované (alebo stláčané) a posúvané na základe dvoch parametrov: mierky a posunutia (časový posun). Ľubovoľný z najčastejšie používaných typov waveletov poskytuje úplný ortogonálny systém (bázu) funkcií.

V prípade waveletovej analýzy (dekompozície) signálu v spojení so zmenou veľkosti a

šírky waveletu sú tieto schopné odhaliť rozdielnosť vlastností signálu pri rôznych škálach a prostredníctvom posunu je možné preanalýzovať vlastnosti signálu v rôznych bodoch na celom skúmanom intervale. Hlavne vďaka vlastnosti úplnosti tohto systému, je možné uskutočniť obnovenie (rekonštrukciu alebo syntézu) signálu prostredníctvom spätnej WT. Potvrdením dôležitosti WT je aj ten fakt, že algoritmy WT sú prezentované v široko používaných systémoch počítačovej matematiky, takých ako sú Mathcad, Matlab a Mathematica. WT môže byť predovšetkým rozdelená na spojitú waveletovú transformáciu (SWT) a diskretnú waveletovú transformáciu (DWT), ktoré sú navzájom úplne rozdielne. SWT nachádza svoje použitie napr. v astronómii a astrofyzike [9-10], geofyzike [11-12], medicíne a biológii [13-14], hydrológii [15], geológii [16], financiách [17] atď.

2. Základy spojitej waveletovej transformácie a jej vlastnosti

Wavelety [18-19] sú časové funkcie vhodné pre analýzu značne premenlivých spojitých signálov. Tvoria jadro waveletovej transformácie a umožňujú zobrazenie signálov z časovej oblasti do časovo-mierkovej oblasti. Ich hlavnou výhodou je, že umožňujú získať v rôznych časoch a pri rôznych frekvenciách odlišné rozlíšenie. Spojitá waveletová transformácia signálu $f(t)$ je definovaná nasledovne

$$\begin{aligned} SWT\{f(t), a, b\} &= \left\langle f(t), \frac{1}{\sqrt{a}}\psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) \right\rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt, \quad a > 0, b \in R \end{aligned} \quad (1)$$

kde symbol $\langle \rangle$ predstavuje skalárny súčin a $\psi(t)$ je tzv. prototypová alebo základná waveletová funkcia, ktorá môže byť považovaná za impulznú charakteristiku pásmového filtra. Táto waveletová funkcia sa nazýva tiež základný (materský) wavelet (small wave - vlnka) a musí vyhovovať dvom podmienkam. Základné wavelety majú zvyčajne jednotkovú energiu, t. j. $\|\psi(t)\| = 1$. Faktor $1/\sqrt{a}$ v rov. (1) zabezpečuje zachovanie energie aj pri zmenenej mierke, t. j. $\|\psi_{a,b}(t)\| = \|\psi(t)\|$. Ďalšie waveletové funkcie (wavelety)

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (2)$$

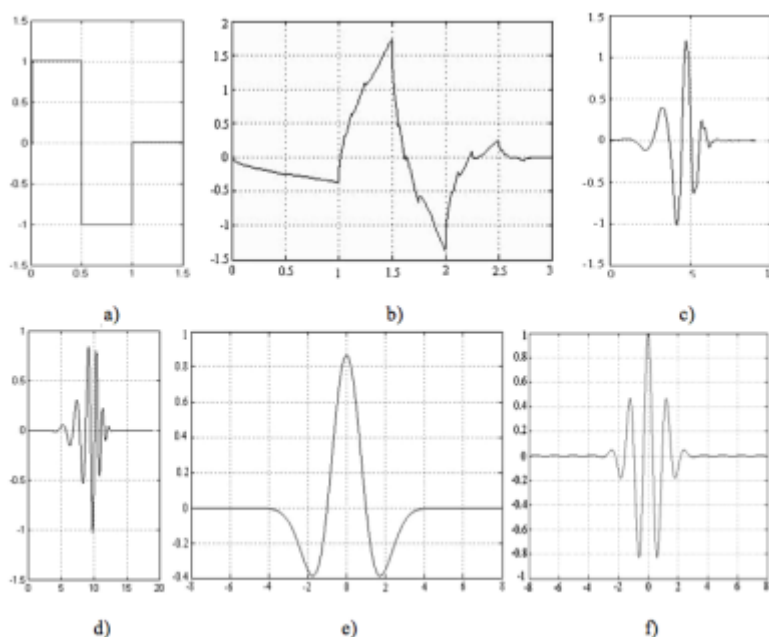
sa získajú z jediného základného waveletu pomocou šírkovej aj výškovej dilatácie a operácie časového posunu. Parameter posunutia "b" určuje veľkosť posunutia waveletu na časovej osi a parameter šírkovej aj výškovej dilatácie (mierky) "a" umožňuje meniť vzťah medzi časovým a frekvenčným rozlíšením. Ak bude $a > 1$ wavelet sa rozťahne v časovej oblasti, čomu zodpovedá stlačenie vo frekvenčnej oblasti. Tým sa znižuje schopnosť rozlišovať signály v čase, ale získame väčšie frekvenčné rozlíšenie. Pre $a < 1$ sa naopak wavelet stlačí v časovej oblasti, čomu zodpovedá rozťahnutie vo frekvenčnej oblasti. Týmto sa zvyšuje schopnosť rozlišovať signály v čase a znižuje sa schopnosť frekvenčného rozlíšenia.

SWT je ako to vyplýva z jej názvu spojitá transformácia. Počítač však pracuje so vzorkami signálu a teda i s diskretnými posunmi v čase b a parametra mierky a. Výsledkom je konečný počet waveletových koeficientov $SWT\{f(t), a, b\}$, ktoré aproximujú spojitý priebeh v časovo-mierkovej oblasti. Pokiaľ signál obsahuje napr. nejakú diskontinuitu v čase $t = t_1$, bude pre malú hodnotu parametra mierky a pri

časovom posunutí $b = t_1$ táto diskontinuita s komprimovaným waveletom korelovať a hodnota koeficientu $SWT\{f(t),a,b\}$ pre dané hodnoty parametrov a a b bude relatívne vysoká. Diskontinuita bude presne lokalizovaná v čase $b = t_1$. Pri použití Fourierovej transformácie by sme v spektre síce videli frekvenčné zložky na vyšších frekvenciách, ale nemali by sme žiadnu informáciu o tom, kde sa diskontinuita nachádza. Algoritmus výpočtu SWT podľa definičného vzťahu (1) možno zhrnúť do šiestich bodov

1. Na začiatku výpočtu sa nastaví hodnota parametra mierky a (typicky $a = 1$) a hodnota posunu v čase $b = 0$ s.
2. Wavelet s parametrom mierky a a časovým posunom b sa najprv vynásobí s vyšetrovaným signálom.
3. Integráciou súčinu cez všetky časy t sa získa waveletový koeficient $SWT\{f(t),a,b\}$, ktorý vyjadruje mieru podobnosti waveletu s daným úsekom signálu. Čím väčšia je hodnota koeficientu, tým väčšia je podobnosť medzi waveletom a príslušným úsekom signálu.
4. Potom sa wavelet posunie o malú hodnotu vpravo, tj. zvýši se hodnota časového posunu b . Kroky 2. až 4. sa opakujú tak dlho, dokedy nie je pre danú mierku a vyšetrený celý časový priebeh signálu.
5. Teraz sa zmení hodnota parametra mierky a , hodnota času b sa nastaví na $t = 0$ s a začne se od kroku 2.
6. Kroky 2. až 5. sa opakujú pre všetky parametre mierky a zo zvoleného intervalu hodnôt.

Ako môžu vyzerat základné wavelety je znázornené na Obr. 1, kde db1, db2, db5 a db10 sú Daubechiesovej wavelety. Existuje množstvo základných waveletov a s nimi aj mnoho systémov waveletových funkcií ako aj waveletových transformácií, ktoré majú odlišné vlastnosti. Keď sú parametre a aj b spojité, waveletová transformácia je vysoko redundantná a zodpovedajúca spätná transformácia nie je jednoznačná. Spojitá waveletová transformácia má menší praktický význam ako jej diskrétna alternatíva a preto sa skôr používa na interpretáciu jej všeobecnej podstaty.



Obr. 1. Príklady waveletov $\psi(t)$ a) Haarov wavelet (db1), b) db2, c) db5, d) db10, e) wavelet tvaru mexického klobúka, f) Morletov wavelet.

Ako je vidieť z rov.(1) hodnoty spektra $SWT\{f(t),a,b\}$, ktoré je dvojrozmernou

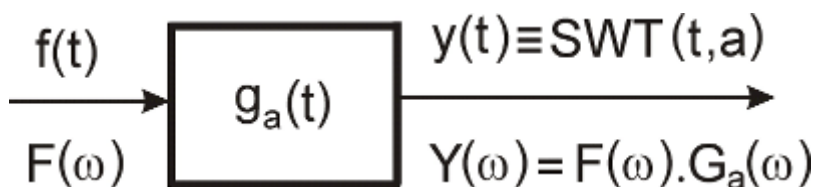
funkciou, sú dané korelačným integrálom medzi spojitým signálom $f(t)$ a funkciou $\psi_{a,b}(t)$. Táto korelácia je mierou podobnosti medzi signálom a dilatovaným a posunutým waveletom. Čím bude parameter mierky a menší, tým bude wavelet v čase užší (komprimovanejší) a bude korelovať s vyššími frekvenciami obsiahnutými v signáli. Zväčšovaním hodnoty parametra mierky a dočielime rozšírenie (dilatáciu) waveletu v čase a wavelet bude korelovať s nízkymi frekvenciami signálu. Pre konštantnú hodnotu mierky a je možné sa pozeráť na SWT aj druhým spôsobom a to ako na konvolúciu signálu $f(t)$ s časovo otočeným šírko- a výškovo dilatovaným waveletom.

$$\begin{aligned} SWT(t, a) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \left\langle f(t), \frac{1}{\sqrt{a}} \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) \right\rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt, \quad a > 0, b \in R \end{aligned} \quad (3)$$

kde

$$g_a(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(-\frac{t}{a}\right) \quad (4)$$

čo je možné interpretovať ako prechod signálu $f(t)$ cez filter, ktorého impulzná charakteristika je $g_a(t)$ ako to vidno na Obr.2. Výstup z filtra je totožný so SWT pre čas t a danú mierku a .



Obr. 2. Interpretácia SWT ako pásmového filtra.

Frekvenčná charakteristika tohto filtra je

$$G_a(\omega) = FT\{g_a(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(-\frac{t}{a}\right) e^{-j\omega t} dt = \sqrt{a} \Psi(-\omega a) \quad (5)$$

kde $\Psi(\omega)$ je Fourierova transformácia waveletu $\psi(t)$. SWT je invertovateľná, ak pre $\Psi(\omega)$ základného waveletu platí tzv. podmienka prípustnosti [4],

$$C_\psi = \int_0^\infty \left| \frac{\Psi(\omega)}{\omega} \right|^2 d\omega < \infty \quad (6)$$

Aby bola splnená podmienka (6) základný wavelet musí vyhovovať dvom podmienkam. Musí to byť oscilačná funkcia s nulovou strednou hodnotou

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (7)$$

a musí konvergovať k nule pre $t \rightarrow \infty$. Druhá podmienka, ktorej musí základný wavelet vyhovovať je

$$\Psi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (8)$$

Okrem toho $|\Psi(\omega)|$ musí rýchlo klesať pre $|\omega| \rightarrow 0$ a pre $|\omega| \rightarrow \infty$. To znamená, že $\Psi(t)$ musí byť impulzná charakteristika pásmového filtra. Potom existuje inverzná SWT v tvare

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} SWT\{f(t), a, b\} \cdot \psi_{a,b}(t) \frac{da db}{a^2} \quad (9)$$

Vlastnosti SWT

SWT má viacero užitočných vlastností, pričom základné z nich si uvedieme.

1) Linearita

$$\begin{aligned} SWT\{\alpha f_1(t) + \beta f_2(t), a, b\} &= \\ &= \alpha SWT\{f_1(t), a, b\} + \beta SWT\{f_2(t), a, b\} \end{aligned} \quad (10)$$

Linearita priamo vyplýva z vlastností skalárneho súčinu v rov. (1).

2) Invariancia v čase

$$g(t) = f(t - t_0) \Rightarrow SWT\{g(t), a, b\} = SWT\{f(t), a, b - b_0\} \quad (11)$$

Invariancia v čase popisuje skutočnosť, že posun analyzovanej funkcie po časovej osi spôsobí rovnaký posun waveletových koeficientov po osi posunu. Túto skutočnosť je možné odvodiť z predstavy, že SWT môže byť interpretovaná pomocou množiny lineárnych časovo invariantných filtrov. Táto vlastnosť sa stráca pri prechode k diskretnej waveletovej transformácii.

3) Zmena mierky

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} f\left(\frac{t}{s}\right) \Rightarrow SWT\{g(t), a, b\} = SWT\left\{f\left(t\right), \frac{a}{s}, \frac{b}{s}\right\} \quad (12)$$

Vzťah popisuje závislosť medzi SWT originálnej funkcie a jej rozťahnutou alebo stlačenou podobou, vo waveletových koeficientoch dôjde k adekvátnemu rozťahnutiu alebo stlačeniu v osi mierky a v osi posunu .

4) Zachovanie energie - pre $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ a jeho $SWT\{f(t), a, b\}$ platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |SWT\{f(t), a, b\}|^2 \frac{da db}{a^2} \quad (13)$$

Energia signálu v časovej a časovo-mierkovej oblasti sa zachováva. Jedná sa o analógiu Parsevalovej teóremy v prípade ortogonálnej waveletovej bázy.

5) Detekcia singularít - označme Diracov impulz v čase t_0 ako $\delta(t-t_0)$. Jeho SWT je

$$SWT\{\delta(t), a, b\} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (14)$$

6) Diferencovateľnosť

$$SWT\{f(t), a, b\} \left[\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right] = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{d^n}{dt^n} [\psi_{a,b}(t)] dt \quad (15)$$

3. Časovo-mierková rovina SWT

Aby sme mohli opísať časovo-frekvenčné rozlíšenie spojitej waveletovej transformácie uvažujme časovo-frekvenčné okno zodpovedajúce príslušnému waveletu $\psi(t)$. Jeho stred je v bode $S_{t\omega}(t_0, \omega_0)$ a veľkosti strán sú $2 \Delta_t$ a $2 \Delta_\omega$. Príslušné parametre sa vypočítajú analogicky ako pre KDFT takto [20]

$$t_0 = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot \frac{|\psi(t)|^2}{\|\psi\|^2} dt \quad (16)$$

$$\omega_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega \cdot \frac{|\Psi(\omega)|^2}{\|\Psi\|^2} d\omega \quad (17)$$

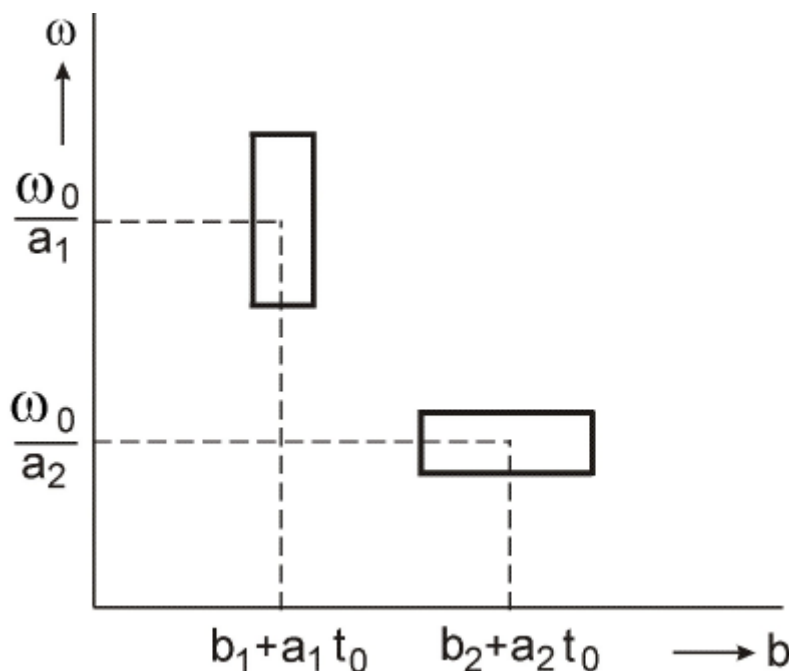
$$\Delta_t = \left(\int_{-\infty}^{\infty} (t - t_0)^2 \cdot \frac{|\psi(t)|^2}{\|\psi\|^2} dt \right)^{1/2} \quad (18)$$

$$\Delta_\omega = \left(\int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_0)^2 \cdot \frac{|\Psi(\omega)|^2}{\|\Psi\|^2} d\omega \right)^{1/2} \quad (19)$$

Pre stred $S_{t\omega}(t_0, \omega_0)$ a veľkosti (smerodajné odchyľky) Δ_t a Δ_ω výškovo a šírko dilatovaného waveletu $\psi(t/a) \leftrightarrow |a| \Psi(\omega/a)$ nastanú zmeny (dostávame) $\{a \cdot t_0, \omega_0/a\}$, $\{a \cdot \Delta_t, \Delta_\omega/a\}$. To znamená, že waveletová transformácia SWT $\{f(t), a, b\}$ poskytuje informáciu o signáli $f(t)$ a jeho spektre $F(\omega)$ v časovo-frekvenčnom okne

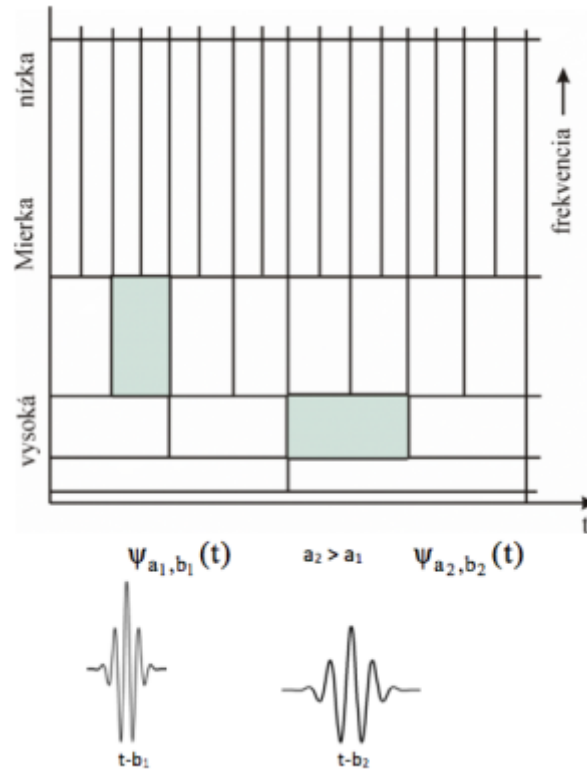
$$[b + a \cdot t_0 - a \cdot \Delta_t, b + a \cdot t_0 + a \cdot \Delta_t] \times \left[\frac{\omega_0}{a} - \frac{\Delta_\omega}{a}, \frac{\omega_0}{a} + \frac{\Delta_\omega}{a} \right] \quad (20)$$

Plocha okna $4\Delta_t\Delta_\omega$ je nezávislá od parametrov a a b , je určená iba použitým waveletom $\psi(t)$. Okno (časová súradnica okna) sa zužuje, keď sa parameter a znižuje a opačne. Na druhej strane okno (frekvenčná súradnica okna) sa rozširuje, keď sa parameter a znižuje a opačne ako to vyplýva zo vzťahu (4) a (5). Obr. 3 nám ilustruje rozlíšenie waveletovej transformácie pre rozdielne parametre a_1, a_2 a b_1, b_2 , pričom $b_2 > b_1$ a $a_2 > a_1$.



Obr. 3. Časovo-frekvenčné rozlíšenie spojitej waveletovej transformácie v časovo-frekvenčnej rovine.

Z vyššie uvedeného vyplýva aj ďalšia dôležitá vlastnosť a to, že pomer výšky okna a polohy stredu okna vo frekvencii ostáva stále konštantný. Označme ho Q_ψ . Platí $Q_\psi = 2\Delta_\omega/\omega_0$. Analogicky s teóriou rezonančných obvodov sa označuje ako kvalita waveletu. Pretože funkcia analýzy $\psi(t)$ je šírko aj výškovo dilatovaná a nie modulovaná ako je tomu u jadra KDFT, waveletová analýza je často nazývaná časovo-mierkovou analýzou na rozdiel od časovo-frekvenčnej analýzy.



Obr. 4. Dve základné operácie s waveletom, zmena mierky a posun v čase definujú pokrytie časovo-mierkovej roviny oknami.

Waveletová transformácia obchádza Heisenbergov princíp neurčitosti tým, že poskytuje dobré časové rozlíšenie na vyšších frekvenciách a dobré frekvenčné rozlíšenie na nízkych frekvenciách, čo zodpovedá zlému rozlíšeniu v mierke na nízkych frekvenciách. Frekvenčná os je však nahradená parametrom zmeny mierky a , takže ide o zobrazenie v tzv. časovo-mierkovej rovine. Vzťah medzi mierkou a frekvenciou je taký, že malé hodnoty mierky odpovedajú vysokým frekvenciám a opačne vysokým hodnotám mierky odpovedajú nízkym frekvenciám. Zobrazenie na Obr.4 sa všeobecne používa pre vysvetlenie ako je možné interpretovať časové a frekvenčné rozlíšenie. Spektrum SWT sa vyjadruje vo forme škálogramu. Škálogram (angl. scalogram) sa nazýva graf, v ktorom je zobrazená hustota (množstvo) energie pre danú mierku a a pozíciu b waveletu (v Heisenbergovom okne waveletu $\psi_{a,b}(t)$). Vypočíta sa ako kvadrát zo spektra SWT, t.j.

$$|SWT\{f(t), a, b\}^2| = \left| \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt \right|^2 \quad (21)$$

Rozdiel oproti spektrogramu u krátkodobej Fourierovej transformácie spočíva v obrátenej orientácii osi a , resp. f . Presnejšie povedané, frekvencia je nepriamo úmerná mierke.

$$f \propto \frac{1}{a} \quad (22)$$

Zo znalosti centrálnej frekvencie f_c možno ľahko vypočítať vzťah medzi mierkou a frekvenciou

$$f = \frac{f_c}{a} \quad (23)$$

kde

$$f_c = \sqrt{\int_0^\infty f^2 |\Psi(f)|^2 df / \int_0^\infty |\Psi(f)|^2 df} \quad (24)$$

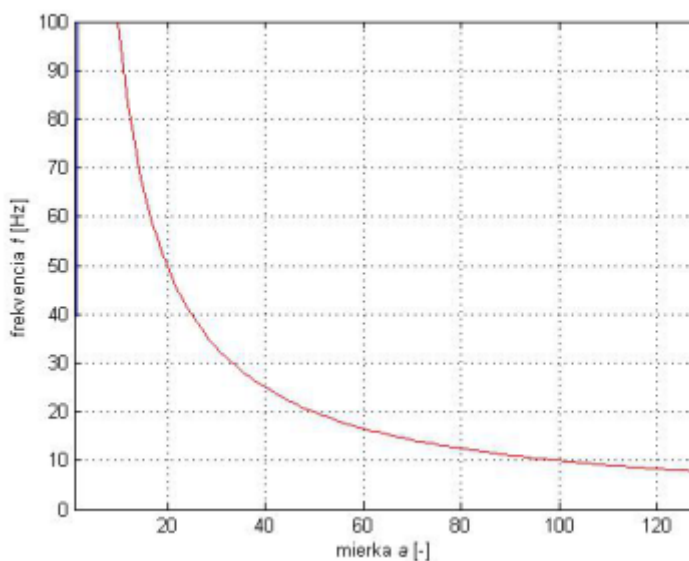
Vzťah medzi mierkou a frekvenciou napr. pre wavelet 'dB1' je možné vypočítať pomocou Matlabu použitím príkazu `scal2frq` takto

```

Fs = 1000;
wname = 'dB1';
scales = 1:1:128;
TAB_Sca2Frq = scal2frq(scales,wname,1/Fs);
clf
plot(TAB_Sca2Frq,'r');
axis tight
grid
hold on
plot([scales(1),scales(end)]);
ylim([0 100]);
xlabel('mierka\it a\rm [-]');
ylabel('frekvencia\it f\rm [Hz]');

```

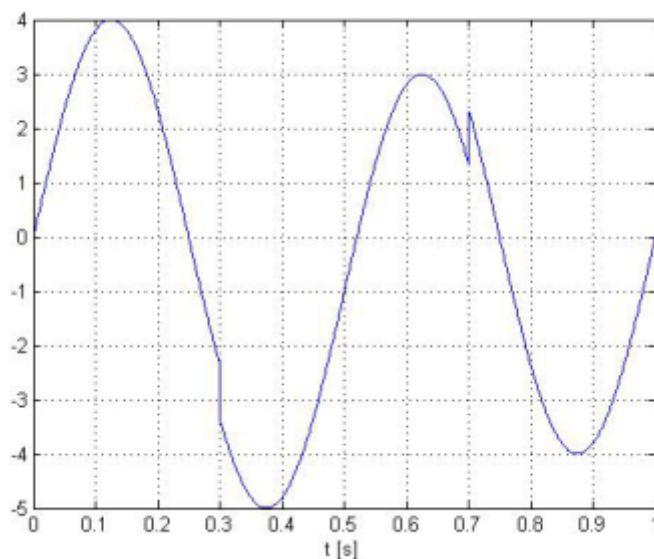
Závislosť medzi mierkou a a frekvenciou f pre wavelet dB1 je zobrazená na Obr.5



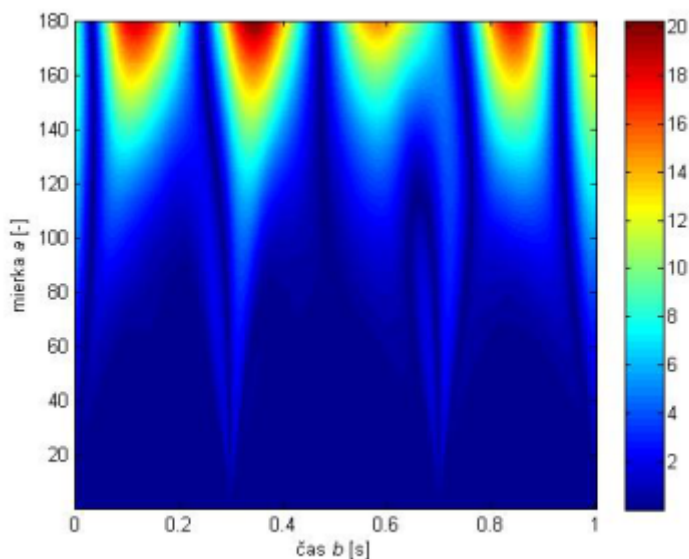
Obr. 5 Závislosť medzi mierkou a frekvenciou pre wavelet dB1.

3. Experimenty

Uvažujme prípad harmonického signálu s frekvenciou 4 [kHz] s dvomi diskontinuitami v čase 0.3 [s] a 0.7 [s] podľa Obr.6. Zodpovedajúci škálogram je na obr.7 a jeho trojrozmerná (3R) verzia na obr.8.

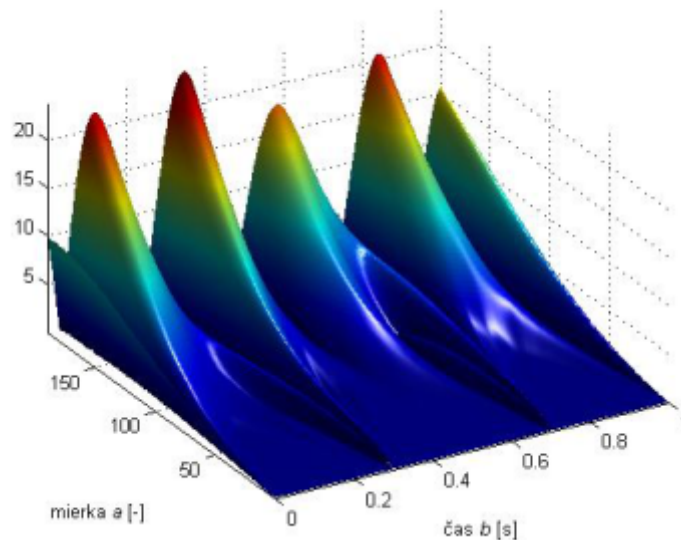


Obr. 6 Harmonický signál $f(t) = 4\sin(4\pi t)$ s dvomi diskontinuitami v čase 0.3 [s] a 0.7 [s].



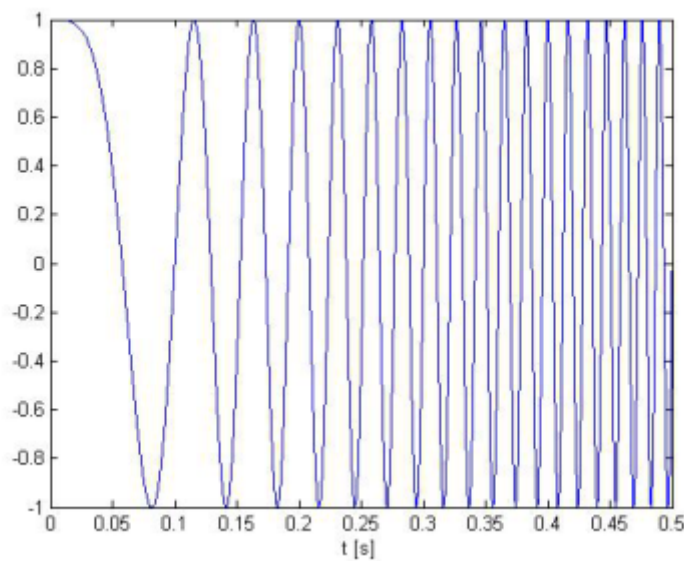
Obr. 7 Škálogram signálu $f(t)$ z obr.6, použitý bol wavelet sym4 .

Zo škálogramov na Obr.7 a Obr.8 vidieť presnú lokalizáciu diskontinuit v čase $b = t_1 = 0.3$ [s] a v čase $b = t_2 = 0.7$ [s]. Ďalej je zrejmé zhoršovanie časového rozlíšenia s rastúcou mierkou a (klesajúcou frekvenciou). Diskontinuity v časech $= 0$ [s] a $= 1$ [s] sú spôsobené obmedzenou dĺžkou signálu.



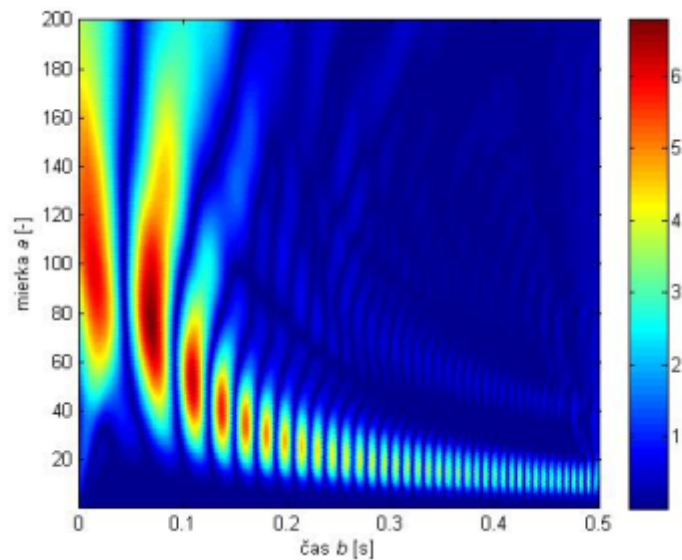
Obr. 8 3R škálogram signálu $f(t)$ z obr.6, použitý bol wavelet sym4.

Uvažujme kosínusový signál s lineárne rozmiatanou frekvenciou vygenerovaný v programe Matlab pomocou funkcie chirp s frekvenciou 0 [Hz] v čase $t = 0$ [s] a 75 [Hz] v čase $t = 0.5$ [s], ktorý je zobrazený na Obr.9.



Obr. 9 Kosínusový signál s lineárne rozmiatanou frekvenciou vygenerovaný v Matlabe pomocou funkcie chirp.

Škálogram tohto signálu je na Obr.10, pričom bol použitý wavelet sym4. Z obrázku je zřejmé, že vysoké frekvencie majú dobré rozlíšenie v mierke (t.j. zlé rozlíšenie vo frekvencii) a dobré rozlíšenie v čase (v grafe vpravo dole), zatiaľ čo nízke frekvencie majú dobré rozlíšenie vo frekvencii (zlé rozlíšenie v mierke) a zlé rozlíšenie v čase (v grafe vľavo).



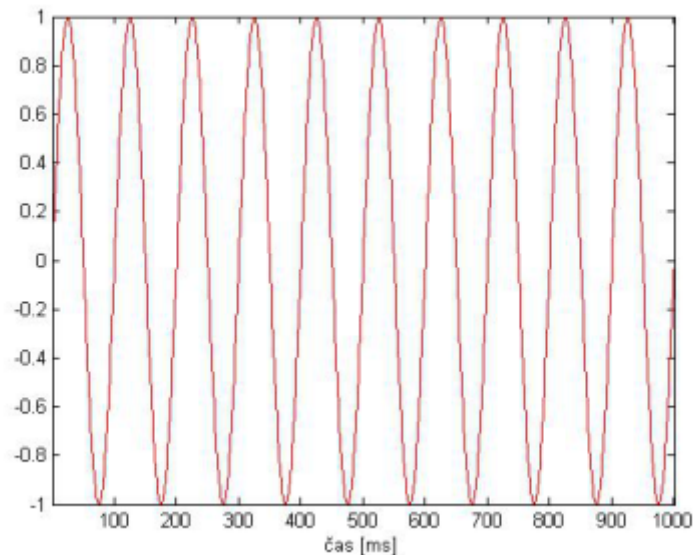
Obr. 10 2R škálogram signálu chirp s lineárne rastúcou frekvenciou pre wavelet sym4.

Ďalej vykonáme waveletovú analýzu dvoch rôznych elementárnych signálov. Prvým bude harmonický sínusový signál s frekvenciou 10 [Hz] na Obr.11.

```

Fs = 1000;
t = 0:1/Fs:1;
f1 = 10;
x = sin(2*pi*t*f1);
plot(x,'r'); axis tight
xlabel('čas [ms]')

```



Obr. 11 Harmonický sínusový signál.

Teraz vypočítame SWT s použitím waveletu gaus4 a navrhne postup ako nájsť frekvenčnú informáciu.

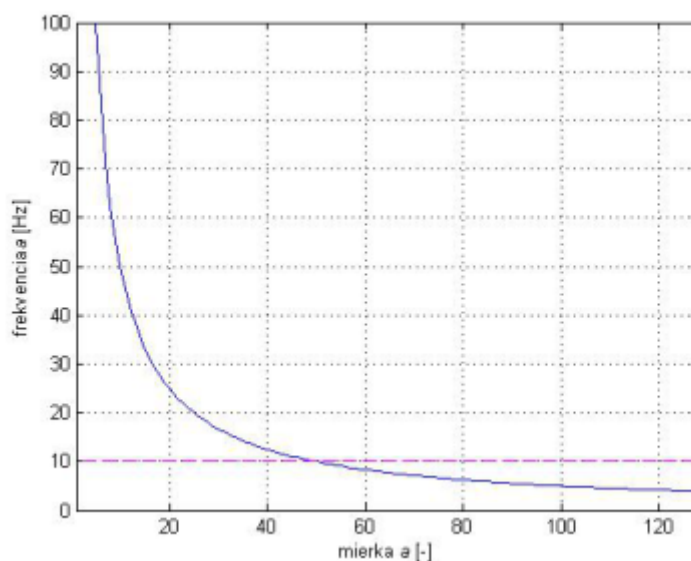
```

wname = 'gaus4';
scales = 1:1:128;
coefs = cwt(x,scales,wname);

```

Keď použijeme funkciu `scal2freq` môžeme vypočítať a graficky zobrazíť závislosť medzi mierkou a a frekvenciou f (Obr.12). Táto závislosť ako bolo ukázané vyššie závisí na zvolenom wavelete. Hľadáme mierku, ktorá zodpovedá frekvencii f_1 analyzovaného signálu.

```
TAB_Sca2f1 = scal2frq(scales,wname,1/Fs);
clf;
plot(TAB_Sca2f1); axis tight; grid
hold on
plot([scales(1),scales(end)],[f1 f1],'m--')
set(gca,'YLim',[0 100])
xlabel('mierka\it a \rm[-]');
ylabel('frekvencia\it a \rm[Hz]');
```



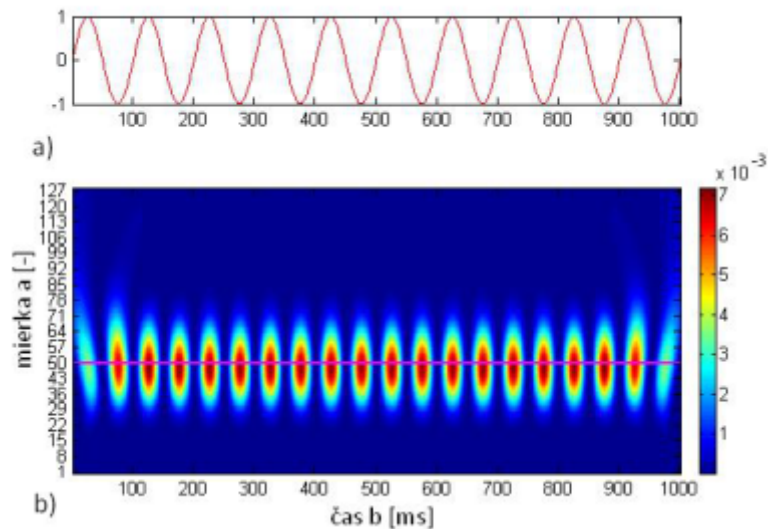
Obr. 12 Závislosť medzi mierkou a frekvenciou pre wavelet *gaus4*.

Hľadáme mierku Sca prislúchajúcu frekvencii f_1 pre wavelet *gaus4*.

```
[~,idxSca] = min(abs(TAB_Sca2f1-f1));
Sca = scales(idxSca)
```

Hodnota tejto mierky je $Sca = 50$. Teraz použijeme SWT pre výpočet škálogramu waveletových koeficientov pre wavelet *gaus4*. Graficky zobrazíme tento škálogram a horizontálnu čiaru pre mierku Sca spojenú s frekvenciou f_1 . Na Obr.13 môžeme vidieť, že táto priamka spája maximálne hodnoty energie v škálograme.

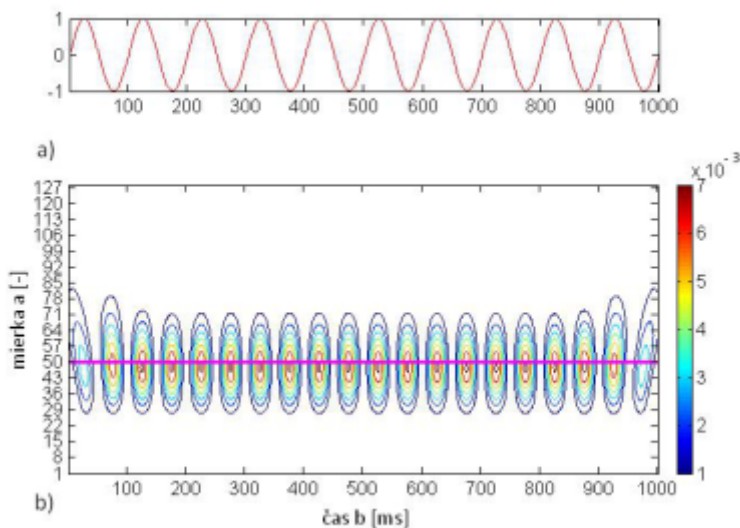
```
wscalogram('image',coefs,'scales',scales,'ydata',x);
hold on
plot([1 size(coefs,2)],[Sca Sca],'Color','m','LineWidth',2);
```



Obr. 13 a) Analyzovaný signál, b) škálogram.

Maximálne hodnoty energie v škálograme sú detekované pre mierku 50, čo prislúcha frekvencii 10 [Hz], ako to vidno z Obr.12. Toto je metóda ako použiť waveletovú analýzu pre nájdenie frekvenčnej informácie. Na Obr.14 je zobrazené iné, tzv. obrysové vykreslenia škálogramu pre určenie frekvenčnej informácie.

```
clf; coefs = cwt(x,scales,wname,'scalCNT');
hold on
plot([1 size(coefs,2)], [Sca Sca], 'Color', 'm', 'LineWidth', 2);
```



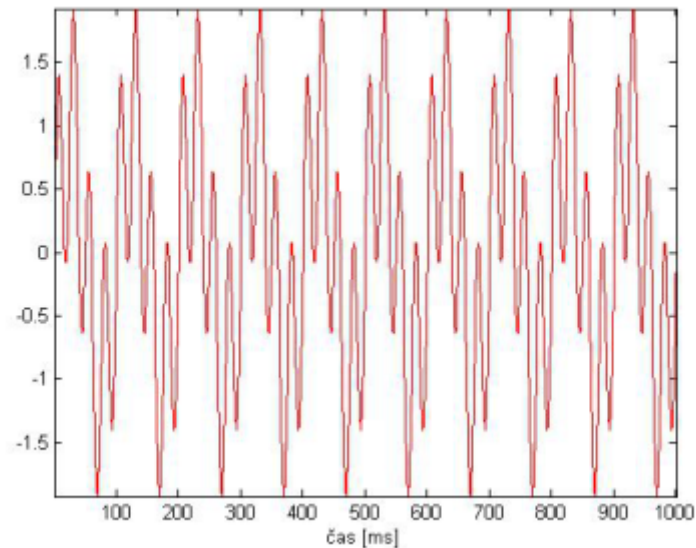
Obr. 14 a) Analyzovaný signál, b) škálogram.

Lokalizácia frekvenčnej informácie v škálograme závisí na wavelete použitom pre nanalýzu. Niektoré iné wavelety sú taktiež veľmi dobre vhodné pre tento cieľ. Druhým signálom pre waveletovú analýzu bude zložitejší periodický signál, ktorý je sumou dvoch periodických signálov s frekvenciami $f_1=10$ [Hz] a $f_2=40$ [Hz]. Vypočítame SWT s použitím waveletu gaus4 a navrhne postup ako nájsť frekvenčnú informáciu. Analyzovaný signál $s(t) = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)$ je na Obr.15.

```

f1 = 10;
f2 = 40;
Fs = 1000;
t = 0:1/Fs:1;
s = sin(2*pi*t*f1) + sin(2*pi*t*f2);
clf; plot(s,'r'); axis tight
xlabel('čas [ms]')

```



Obr .15 signál $x(t) = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)$.

Vypočítame SWT signálu $s(t)$ a potom zobrazíme škálogram ako to vidno na Obr.16. Na tomto obrázku sú tiež zobrazené dve horizontálne čiary spájajúce lokálne maximá energie tohto škálogramu prislúchajúce mierkam Sca_1 and Sca_2 , ktoré sú spojené s frekvenciami f_1 a f_2 .

```

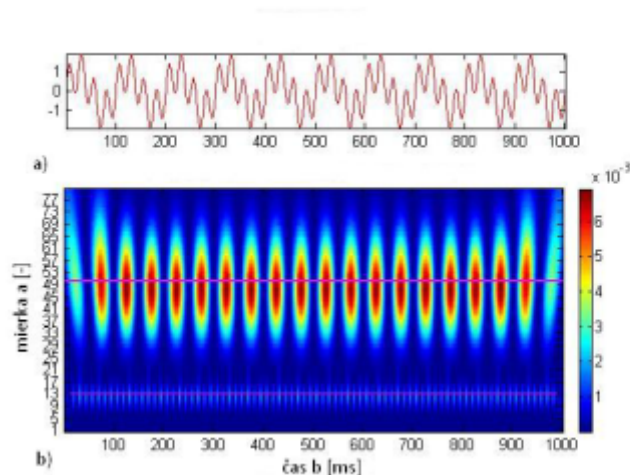
f1 = 10;
f2 = 40;
Fs = 1000;
t = 0:1/Fs:1;
s = sin(2*pi*t*f1) + sin(2*pi*t*f2);
clf;
wname = 'gaus4';
scales = 1:1:80;
coefs = cwt(s,scales,wname);
TAB_Sca2f1 = scal2frq(scales,wname,1/Fs);
clf;
figure(1);
plot(TAB_Sca2f1); axis tight; grid
hold on
plot([scales(1),scales(end)],[f1 f1],'m--')
set(gca,'YLim',[0 100])
hold on
plot([scales(1),scales(end)],[f2 f2],'g--')
set(gca,'YLim',[0 100])

```

```

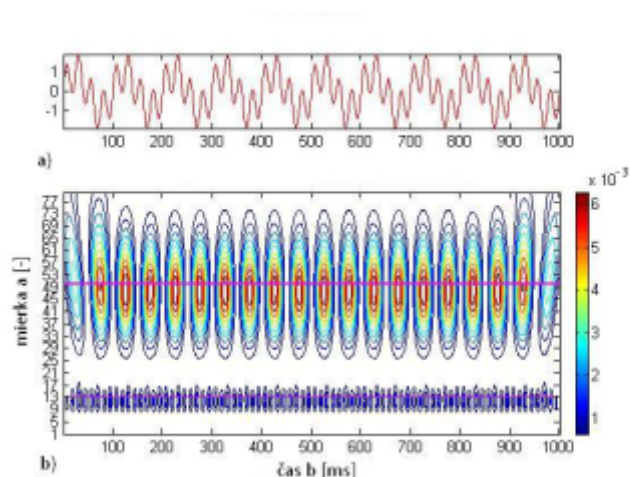
xlabel('mierka\it a \rm[-]'); ylabel('frekvencia\it f
\rm[Hz]');
[~,idxSca_1] = min(abs(TAB_Sca2f1-f1));
Sca_1 = scales(idxSca_1)
[~,idxSca_2] = min(abs(TAB_Sca2f1-f2));
Sca_2 = scales(idxSca_2)
figure(2);
wscalogram('image',coefs,'scales',scales,'ydata',s);
hold on
plot([1 size(coefs,2)],[Sca_1
Sca_1],'Color','m','LineWidth',2);
plot([1 size(coefs,2)],[Sca_2
Sca_2],'Color','m','LineWidth',1);
figure(3);
coefs = cwt(s,scales,wname,'scalCNT');
hold on
plot([1 size(coefs,2)],[Sca_1
Sca_1],'Color','m','LineWidth',2);
plot([1 size(coefs,2)],[Sca_2
Sca_2],'Color','m','LineWidth',1);

```



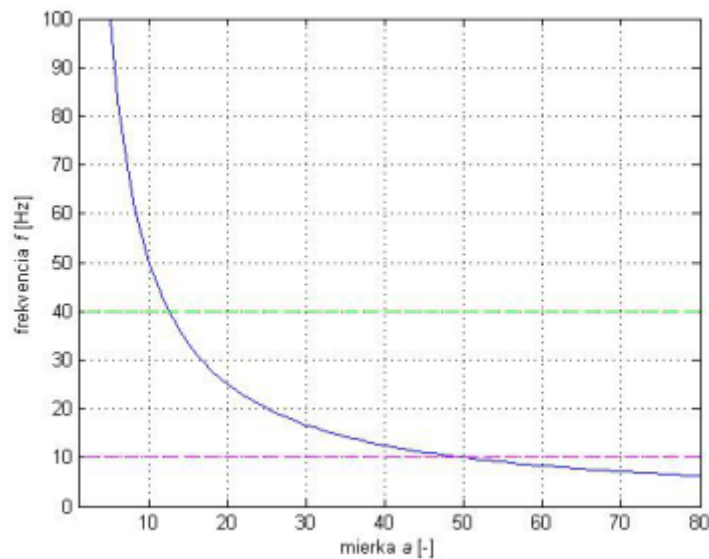
Obr. 16 a) Analyzovaný signál, b) škálogram.

Obr.17 zobrazuje alternatívne obrysové vykreslenia škálogramu z Obr.16 .



Obr. 17 a) Analyzovaný signál, b) škálogram.

Pre mierky $Sca_1 = 50$ a $Sca_2 = 13$ z Obr.18 určíme nakoniec frekvencie $f_1=10$ [Hz] a $f_2=40$ [Hz].



Obr. 18 Závislosť medzi mierkou a frekvenciou pre wavelet gaus4.

Pomocou SWT možno tiež dobre určiť harmonické signály (ich frekvencie) zo signálu daného súčtom harmonických signálov a bieleho šumu.

3. Záver

Po teoretickej analýze SWT boli vypočítané a zobrazené škálogramy pre harmonický signál s dvomi diskontinuitami v čase, pričom pomocou vypočítaného škálogramu boli určené časové okmžiky týchto diskontinuit. Zo škálogramu signálu s rozmiatanou frekvenciou je zrejmé, že vysoké frekvencie majú dobré rozlíšenie v mierke, zatiaľ čo nízke frekvencie majú dobré rozlíšenie vo frekvencii. Pre harmonický signál a potom súčet dvoch harmonických signálov je pomocou ich škálogramov a nelineárnej závislosti medzi mierkou a frekvenciou možné určiť hodnoty frekvencií harmonických signálov.

Literatúra

1. A. Haar, " Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme", Mathematische Annalen, 69, 1910, p. 331-371.
2. P. Goupillaud, A. Grossmann, J. Morlet, J, "Cycle-octave and related transforms in seismic signal analysis. Geoprospection", Vol. 23, 1984, p. 85- 102.
3. A. Grossmann, J. Morlet, "Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape", SIAM J. Anal. 15, p. 723-736, 1984.
4. Y. Meyer, "Ondelettes, vol. 1 of Ondelettes et Opérateurs", Paris: Hermann, 1990.
5. S. Qian, D. Chen, "Joint Time-Frequency Analysis - Methods and Applications, (chap.3 Gabor Expansion - Inverse Sampled STFT) ", 2011, ISBN 0-13-254384-2.
6. J. Zavacký, "Krátkodobá Fourierova transformácia", Posterus, Roč. 7, č. 12, 2014, p. 1-11, ISSN 1338-0087
7. L. Cohen, "Time Frequency Analysis: Theory and Applications", Prentice Hall (Chapter

- 8), 1995, ISBN: 9780135945322.
8. B. Boashash, "Note on the Use of the Wigner Distribution for Time Frequency Signal Analysis", IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol. 36, No. 9, 1988, p. 1518-1521.
 9. J. P. Antoine et al, , "Two Dimensional Wavelets and their Relatives ",Cambridge UK, New York,2004.
 10. E. Slezák, A. Bijaoui, G. Mars, "Identification of Structures from Galaxy Counts. Use of the Wavelet Transform", Astron. Astroph.,Vol. 227, 1990, p. 301-316.
 11. E. Foufoula-Georgiou, P. Kumar, "Wavelets in Geophysics", 1994, Academic, San Diego, Calif., 384 p.
 12. M.E. Everet, "Near Surface Applied Geophysics",Cambridge University Press, New York,2013.
 13. A. Albroubi, M. Unser, "Wavelets in Medicine and Biology",CRC Press, 1996.
 14. M. N. Varma, A. Chatterjee, "In Molecular Radiation Biology, Monte Carlo Methods",Plenum Press, New York. 1994.
 15. B.Sivakumar, R. Berndtsson, "Advances in Data-Based Approaches in Hydrogeologic Modeling and Forecasting ",World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2010.
 16. B.Hobbs, A. Ord, "Structural Geology,The Mechanics of Deforming Metamorphic Rocks", Elsevier Inc.,Netherlands,2015.
 17. F. In, S. Kim, "An Introduction to Wavelet theory in Finance, A Wavelet Multiscale Approach",World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.,USA, 2013.
 18. S. Mallat, "A Wavelet Tour of Signal Processing", Academic Press, 2009, ISBN 13: 978-0-12-374370-1.
 19. J. Zavacký, J.Mihalík, J, "Algoritmus vypočtu waveletov pomocou banky zrkadlových filtrov", Acta Electrotechnica et informatica, Vol.5, No.1, 2005, s.42-49.
 20. A. Mertins, "Signal Analysis, Wavelets, Filter Banks, Time Frequency Transforms and Applications ", John Wiley and Sons, New Jersey, 1999.
-