

## Analýza vlastností synchronného motora

Tesár Richard · Elektrotechnika, Strojárstvo

28.10.2009

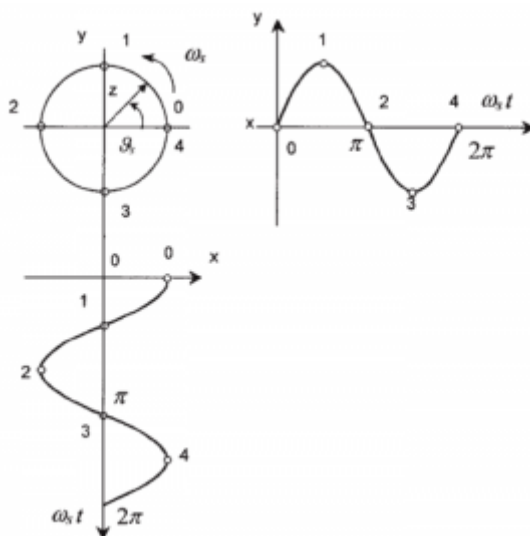


V predchádzajúcom článku sme sa venovali úvodu do synchronných motorov. Popísali sme si základné rozdelenie synchronných motorov, ich konštrukciu a princíp činnosti. V dnešnej časti si popíšeme matematický aparát, ktorý stojí za synchronnými motormi.

### 3 Vznik kruhového otáčavého poľa a priama a spätná Clarcova transformácia

Vznik kruhového rovinného otáčavého poľa tvorí fyzikálny základ striedavých strojov. Pre názornú predstavu treba vychádzať z toho, že rovinu tvorí priečny rez stroja. Na vytvorenie kruhového poľa treba generovať dva budiace signály, ktoré sú fázovo posunuté o  $90^\circ$  a pôsobia v smere osi x a y (obr. 4).

$$\begin{aligned} u_x &= u_m * \cos \omega_s * t \\ u_y &= u_m * \sin \omega_s * t \end{aligned} \quad (1)$$



Obr.4 Vznik otáčavého poľa v rovine x -y

Pre zavedenie ďalších pojmov je vhodné stotožniť rovinu x - y s komplexnou rovinou, kde x je reálna os a y je imaginárna os komplexnej roviny. Budiace signály  $u_x$ ,  $u_y$  sú zložky rovinného, časovo premenlivého vektora vyjadreného v kartézskych

súradniciach vzťahom

$$\hat{u} = u_x + j u_y = u_m * (\cos \omega_s * t + j * \sin \omega_s * t) \quad (2)$$

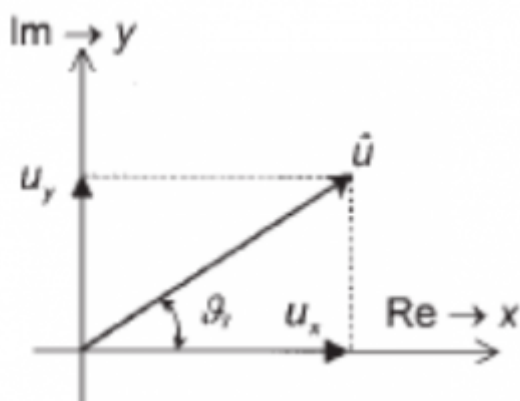
alebo v polárnych súradniciach

$$\hat{u} = u_m * e^{j \omega_s * t} = u_m * e^{j \vartheta_s} \quad (3)$$

$$\vartheta_s = \int \omega_s dt \quad (4)$$

kde  $\vartheta_s$  je argument vektora,  $u_m$  je modul vektora.

Vektor napätia možno zobraziť v komplexnej rovine podľa obr. 5.



Obr.5 Vektorový diagram vektora napätia

Otáčavé kruhové pole sa môže vytvoriť  $m$  - fázovým symetrickým systémom napätí kde  $m \geq 2$ ,  $m = 2, 3, 5, 7$  (vynechávajú sa párne násobky čísla 2, 3, 5, 7). Trojfázový symetrický systém napätí nech je vyjadrený vzťahom:

$$\begin{aligned} u_a &= U_m * \cos(\omega_e t) \\ u_b &= U_m * \cos(\omega_e t - 120^\circ) \\ u_c &= U_m * \cos(\omega_e t + 120^\circ) \end{aligned} \quad (5)$$

kde  $U_m$  je amplitúda napájacieho napätia a  $\omega_e$  je uhlová frekvencia napájacieho napätia.

Pre symetrickú sústavu platí vzťah

$$u_a + u_b + u_c = 0 \quad (6)$$

Pre zavedenie ďalších pojmov stotožníme rovinu priečného rezu motora s komplexnou rovinou. Pozdĺžnu os vinutia a stotožníme s reálnou osou komplexnej roviny.

V trojfázovom systéme vyjadríme mechanické natočenie statorových vinutí nasledovnými jednotkovými vektormi v komplexnej rovine.

$$\begin{aligned}\hat{I}_a &= 1 \\ \hat{I}_b &= 1 * \hat{a}^2 = e^{j120^\circ} = \cos 120^\circ + j \sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \hat{I}_c &= 1 * \hat{a}^2 = e^{j240^\circ} = \cos 240^\circ + j \sin 240^\circ = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\quad (7)$$

Vektor napätia daného vinutia v komplexnej rovine je rovný súčinu napätia vinutia s príslušným jednotkovým vektorom (7). Výsledný vektor napätia v komplexnej rovine je rovný súčtu vektorov napätí jednotlivých vinutí.

$$\hat{u} = 1 * (u_a + \hat{a} * u_b + \hat{a}^2 * u_c) \quad (8)$$

Ak pravú stranu rovnice (8) vynásobíme číslom  $k$ , potom môžeme vyjadriť všeobecný tvar pre lineárnu transformáciu z 3/2.

### Všeobecný tvar pre lineárnu transformáciu z 3/2

$$\begin{aligned}\hat{u} &= k(u_a + \hat{a} * u_b + \hat{a}^2 * u_c) = \\ &= ku_a + k\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)u_b + k\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)u_c = u_{s\alpha} + j u_{s\beta}\end{aligned}\quad (9)$$

Zo vzťahu (9) vyplýva, že vektor napätia vytvorený trojfázovým satorovým symetrickým systémom môžeme vytvoriť aj pomocou dvojfázového satorového symetrického systému.

### Priama a spätná Clarkova transformácia

Nasledujúce vzťahy vyjadrujú ekvivalentný prepočet medzi trojfázovým symetrickým satorovým systémom (a, b, c) a ekvivalentným dvojfázovým symetrickým satorovým systémom ( $\alpha, \beta$ ).

Ak os  $\alpha$  stotožníme s reálnou osou komplexnej roviny (rovnako ako os a), tak použitím vzťahu (9) dostávame prepočtové vzťahy pre priamu Clarkovu transformáciu 3/2.

$$u_{s\alpha} = k\frac{3}{2}u_a \quad (10)$$

$$u_{s\beta} = k\frac{\sqrt{3}}{2}(u_b - u_c) \quad (11)$$

Použitím vzťahov (6) a (10) a (11) dostávame prepočtové vzťahy pre spätnú Clarkovu transformáciu 2/3.

$$u_a = \frac{2}{3k}u_{s\alpha} \quad (12)$$

$$u_b = -\frac{1}{3k}u_{s\alpha} + \frac{1}{k\sqrt{3}}u_{s\beta} \quad (13)$$

$$u_c = -\frac{1}{3k}u_{s\alpha} - \frac{1}{\sqrt{3}}u_{s\beta} \quad (14)$$

V prípade Clarkovej transformácie je prepočtový koeficient  $k$  rovný hodnote

$$k = \frac{2}{3} \quad (15)$$

#### 4 Transformácia statorového systému $\alpha, \beta$ do fiktívneho systému rotora $d, q$ .

Súradnicový systém  $m$  - fázových veličín striedavého motora môže byť viazaný - orientovaný buď na časti stroja, (stator, rotor) alebo čo sa už ťažšie chápe aj na vektor stavových veličín motora (magnetický tok, prúd, napätie), ktoré sa otáčajú synchronnou uhlovou rýchlosťou v rovine tvoriacej priečny rez stroja.

Základné súradnicové systémy sú:

„s“ súradnicový systém pevne viazaný na stator  $s \rightarrow (\alpha, \beta)$

„r“ súradnicový systém pevne spojený s rotorom  $r \rightarrow (d, q)$

„ $w_k$ “ súradnicový systém orientovaný na vektory stavových veličín  $w_k \rightarrow (1, 2)$

Zavedenie rôznych súradnicových systémov takto vyžaduje riešiť problém ich vzájomného vzťahu. Pri otáčaní rotora SMPM t.j. pri variabilnej hodnote uhla natočenia  $\vartheta$  sa mení magnetická väzba (vzájomná indukčnosť) medzi statorovými vinutiami a PM v rotore. Transformáciou statorového systému rovníc v súradnicovom systéme  $\alpha, \beta$  do súradnicového systému  $d, q$  pevne spojeného s rotorom dostaneme vzťahy, v ktorých sa magnetické väzby medzi vinutiami a PM nemenia (nie sú závislé od uhla natočenia rotora  $\vartheta$ ). Tým vytvoríme fiktívne statorové vinutia  $d, q$  spojené s rotorom.

Striedavé statorové veličiny sa tak transformujú na jednosmerné veličiny. V ustálenom stave budú transformované veličiny konštantné.

Súradnicové systémy statora  $(\alpha, \beta)$  a rotora  $(d, q)$  majú svoj počiatok umiestnený v počiatku komplexnej roviny v bode  $(0, j0)$ . Os  $d$  je totožná s pozdĺžnou osou rotora (osou radiálne uloženého PM). Rotorový súradnicový systém  $(d, q)$  pevne spriahnutý s rotorom sa voči statorovému súradnicovému systému  $(\alpha, \beta)$  otáča uhlovou rýchlosťou  $\omega(t)$ . Uhol natočenia rotora voči statoru je potom daný vzťahom:

$$\vartheta(t) = \int \omega(t) dt \quad (16)$$

Na Obr. 6 sú znázornené súradnicové systémy  $(\alpha, \beta)$  a  $(d, q)$ .

Pre ľubovoľný komplexný vektor platia vzťahy

$$\hat{u}_s^R = \hat{u}_s^S * e^{-j\vartheta} \quad (17)$$

$$\hat{u}_s^S = \hat{u}_s^R * e^{j\vartheta} \quad (18)$$

Komplexný vektor vyjadrený v súradnicovom systéme rotora  $d, q$  má tvar:

$$\hat{u}_s^R = u_d + j u_q \quad (19)$$

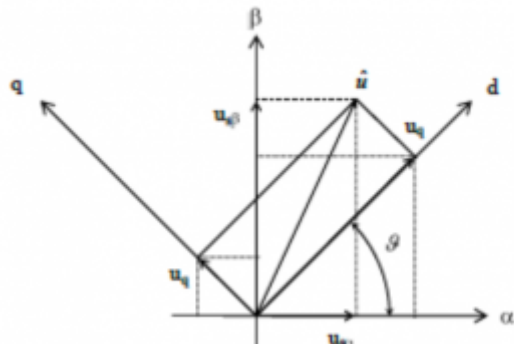
Komplexný vektor vyjadrený v súradnicovom systéme statora  $\alpha, \beta$  má tvar:

$$\hat{u}_s^S = u_{s\alpha} + j u_{s\beta} \quad (20)$$

Pre vektory vyjadrené v zložkovom tvare dostávame vzájomné prepočtové vzťahy:

$$\begin{aligned} u_{s\alpha} &= u_d \cos(\vartheta) - u_q \sin(\vartheta) \\ u_{s\beta} &= u_d \sin(\vartheta) + u_q \cos(\vartheta) \end{aligned} \quad (21)$$

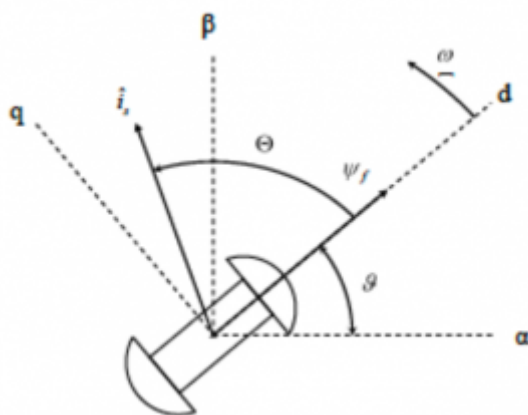
$$\begin{aligned} u_d &= u_{s\alpha} \cos(\vartheta) + u_{s\beta} \sin(\vartheta) \\ u_q &= u_{s\alpha} \sin(\vartheta) - u_{s\beta} \cos(\vartheta) \end{aligned} \quad (22)$$



Obr. 6 Zobrazenie komplexného vektora v súradnicovom systéme statora ( $\alpha, \beta$ ) a v súradnicovom systéme rotora ( $d, q$ ) natočeného o uhol  $\vartheta$  voči statorovému systému

## 5 Matematický model SMPM v súradnicovom systéme rotora ( $d, q$ )

V súradnicovom systéme  $d, q$  sú statorové vinutia transformované na fiktívne statorové vinutia umiestnené v osiach  $d$  a  $q$ . Os  $d$  je vždy totožná s pozdĺžnou osou rotora Obr. 7.



Obr. 7 Vektorový diagram radiacích veličín SMPM

Pre vektory magnetického toku  $\hat{\psi}_s$ , statorového napätia  $\hat{u}_s$  a statorového prúdu  $\hat{i}_s$  v komplexnej rovine spriahnutej s rotorom ( $d, q$ ) platia vzťahy:

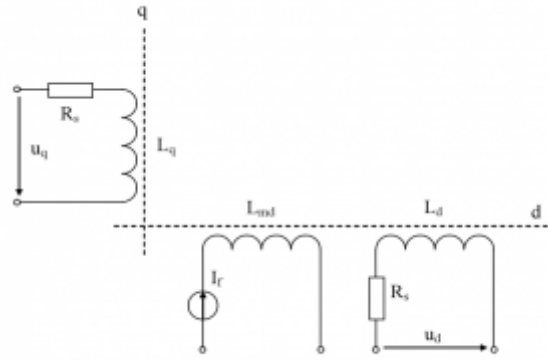
$$\hat{\psi}_s = \psi_d + j\psi_q \quad (23)$$

$$\hat{u}_s = u_d + ju_q \quad (24)$$

$$\hat{i}_s = i_d + ji_q \quad (25)$$

Vektory komplexne združené označujeme pomocou (\*):  $\hat{\psi}_s^* = \psi_d - j\psi_q$ .

Z obrázku Obr. 8 vidieť znázornenie elektromagnetického systému SMPM v sústave  $d, q$ .



Obr. 8 Náhradná elektrická schéma SMPM v sústave rotora  $d, q$

Budiaci obvod je nahradený permanentnými magnetmi, ktorý je v schéme vyjadrený zdrojom konštantného budiaceho prúdu  $I_f$ .

Pre zložky magnetických tokov platia nasledujúce vzťahy:

$$\psi_d = L_d i_d + L_{md} i_f = L_d i_d + \psi_f \quad (26)$$

$$\psi_f = L_{md} i_f \quad (27)$$

$$\psi_q = L_q i_q \quad (28)$$

Hodnotu konštantného budiaceho magnetického toku  $\psi_f$  od permanentných magnetov je možné určiť aj pomocou vzťahu:

$$\psi_f = \frac{2 * K_t}{3 * p'} \quad (29)$$

Kde  $K_t$  predstavuje momentovú konštantu motora a  $p'$  počet pólových dvojíc synchronného motora.

Z rovníc (26) až (28) vyplývajú rovnice pre prúdy fiktívnych vinutí v smere osi  $d, q$

$$i_d = \frac{1}{L_d} (\psi_d - \psi_f) = \frac{1}{L_d} (\psi_d - L_{md} i_f) \quad (30)$$

$$i_q = \frac{1}{L_q} \psi_q \quad (31)$$

Elektromagnetický systém SM obsahuje rovnicu pre satorový obvod, ktorá má v sústave rotora ( $d, q$ ) tvar:

$$\hat{u}_s = R_s \hat{i}_s + \frac{d\hat{\psi}_s}{dt} + j\omega_e \hat{\psi}_s = u_d + j u_q \quad (32)$$

V zložkovom tvare:

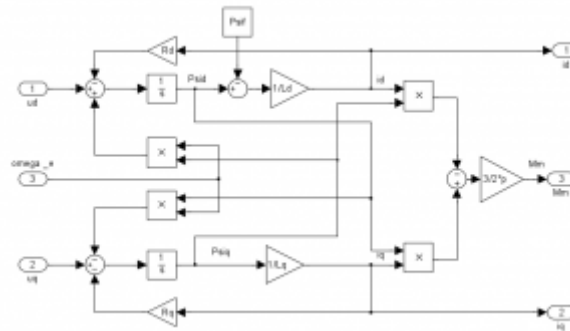
$$u_d = R_s i_d + \frac{d\psi_d}{dt} - \omega_e \psi_q \quad (33)$$

$$u_q = R_s i_q + \frac{d\psi_q}{dt} - \omega_e \psi_d \quad (34)$$

Rovnica pre elektromagnetický moment:

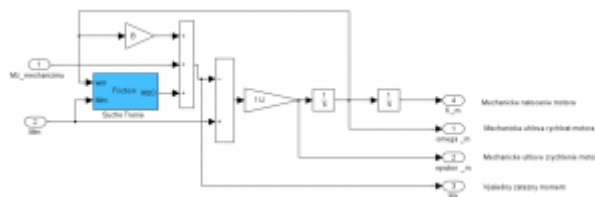
$$M_m = \frac{3}{2}p' \Im(\hat{i}_s * \hat{\psi}_s^*) = \frac{3}{2}p'(\psi_d i_q - \psi_q i_d) \quad (35)$$

Z predchádzajúcich vzťahov je na Obr. 9 zostavená bloková schéma elektrickej časti SMPM vo fiktívnom rotorovom súradnicovom systéme  $d, q$ .



Obr. 9 Bloková schéma elektrickej časti SMPM vo fiktívnom rotorovom súradnicovom systéme  $d, q$

Doplňujúca mechanická časť SMPM Obr. 10 sa pripája na výstupný moment elektrickej časti SMPM. Táto dekompozícia na elektrickú a mechanickú časť je vhodná pre účely simulácie, kedy do mechanickej časti môžeme zakomponovať aj prípadný pracovný mechanizmus so záťažovým momentom (prevodovka, navíjačka, extrúder, ...). Konštanta  $B$ , predstavuje koeficient viskózneho trenia, blok suchého trenia slúži na modelovanie suchého trenia  $M_{z0}$ .



Obr. 10 Mechanický subsystém SMPM

## Literatúra

1. Dal Y. Ohm: Dynamic model of PM synchronous motor, Drivetech Inc., Virginia [http://www.drivetechinc.com/articles/IM97PM\\_Rev1forPDF.pdf](http://www.drivetechinc.com/articles/IM97PM_Rev1forPDF.pdf)
2. Žalman, M.: Akčné členy, STU, Bratislava 2003