

## Návrh matematického modelu popisujúceho vysychanie zelenej kávy

Grygar Vojtěch · Informačné technológie

01.12.2010



Obsahom práce je návrh difúzného modelu popisujúceho vysychanie zelenej kávy, ktorý dáva možnosť určiť rozloženie vlhkosti v žuku obsahujúcej zelenú kávu umiestneném ve sklade za daných podmienok. Stanovený model je riešen analyticky Laplaceovou transformáciou. Na základe získaných výsledných vzťahů je vytvorená funkčná programová aplikácia v prostredí Matlab, pomocou ktorej pri zadání potrebných parametrov s ohľadom na naměřené experimentální hodnoty lze určit dobu vysychání a zobrazit vlhkostní pole v zelenej káve. Výsledky práce môžu byť využívané jak v pedagogice, tak i v technické praxi. Navrhovaný model je obecně platný a popisuje průběh vysychání jakékoliv porézní tuhé látky, proto je jeho využití široké.

### 1. Úvod

Každý máme nějakou představu o tom co je vlastně káva. Ale jen málo z nás může s určitostí odpovédět, kde se tento hojně rozšířený černý nápoj s tak aromatickými a povzbuzujícími vlastnostmi vzal. Kde je počátek její cesty před samotným připravením si oblíbeného šálku kávy. Kávovník pochází z africké Etiopie odkud byl propašován a následně pěstován na arabském poloostrově, kde začal počátek obchodu s touto komoditou a nyní je druhou nejobchodovanější surovinou hned po ropě na světě.

Kávu si dopřávají snad po celém světě a úprav tohoto nápoje existuje celá řada. Mezi nejznámější způsoby přípravy kávy patří espresso, cappuccino a moccacino. Přičemž každá příprava má základní podmínku. Sbírat zdravé plody kávovníku, zpracovat je na zelenou kávu a poslední fází je kávová zrna upražit při vysoké teplotě. Po pražení získává káva svoji nezaměnitelnou aromatickou vůni. Další složkou, která z kávy dělá výborný mok je obsah kofeinu, což je látka, která chrání plody kávovníků před divokou zvěří.

Červené plody kávovníku vypadají pro většinu zvířat velice lákavě a proto je příroda ochránila kofeinem a dalšími látkami, které jsou pro zvířata smrtelné, protože nezvládnou kofein metabolizovat. Lidem naštěstí žádné nebezpečí nehrozí, i když vypijí několik šálků denně. Ať už preferujeme jakýkoliv druh kávy, jistě jste si ji oblíbili pro její nezaměnitelné aroma a lahodnou chuť. Dobrá káva člověka nabijí energií a povzbudí celé tělo i mysl.

Než je možné si jí takto vychutnat, musí kávová zrna absolvovat dlouhou cestu ke

spotřebiteli, během které může být značně ovlivněna její celková chuť a aroma. První důležitou operací je sušení, kdy se kávová zrna zbavují převážné vlhkosti – optimální hodnota vlhkosti v kávových bobech, by se měla pohybovat kolem dvanácti hmotnostních procent. Nejvíce jsou vlastnosti kávy ovlivněny při jejím skladování a pražení.

Zelenou kávu v žocích je možné skladovat v prostorách, které mají stálou optimální teplotu do 20°C a vlhkost max. 70% pro kvalitní uskladnění, aby nedocházelo k plesnivění kávových zrněk. Tady může vyvstat problém, jak tyto podmínky dodržet. Cílem této práce, je návrh matematického modelu vysychání zelené kávy, ověření jeho platnosti porovnáním s experimentálně naměřenými daty. [1]. Dále na základě platného modelu udržovat teplotu a relativní vlhkost ve skladu na požadovaných hodnotách.

## 2. Literární studie

### 2.1 Co je káva?

Na první pohled se zdá odpověď celkem snadná, vždyť pro nikoho není káva neznámou. Ale ve skutečnosti není odpověď, tak jednoduchá. Mnoho lidí neví, kde se vlastně druhý nejobchodovanější produkt hned po ropě vzal. A jak dlouhou, ne příliš jednoduchou cestu musí káva urazit, než si ji jako lahodný nápoj s charakteristickou vůní a s povzbuzujícími účinky, které vyvolává kofein spolu s dalšími složkami, můžeme připravit do svého oblíbeného šálku.

### 2.2 Pěstování kávy

Počátek její cesty začíná na plantážích a nebo menších lesních mýtinách, kde se rostlina, s latinským názvem *Coffea* nebo-li kávovník, vysazuje jako strom nebo keř. Původně divoce rostoucí strom v oblasti Etiopie na Africkém kontinentu se postupem času rozšířil do dalších zemí. V dnešní době se pěstováním a zpracováním kávy zabývá kolem 80 zemí, ale převážná produkce kávy pochází z plantáží podél Jižní a Střední Ameriky, Afriky a Asie. Přičemž v některých zemích „třetího světa“ závisí celá ekonomika právě na pěstování a vývozu této komodity a pro tamější obyvatelstvo je to mnohdy jediná možnost jakéhokoliv příjmu. Navíc poslední dobou musí někteří bojovat s nadbytkem plodiny, což některé pěstitele přivádí na mizinu.[1]

Obecně platí, že kávovníky lze pěstovat v oblastech, kde je pro jejich růst příznivé podnebí a vhodné klimatické podmínky. Rostliny během svého růstu potřebují dostatečnou vláhou a sluneční světlo. Ovšem neoptimálnější podmínky nabízí tropický pás, přesněji oblast mezi obratníky Raka a Kozoroha. Každý druh kávovníku však vyžaduje odlišné podmínky pro svůj růst, proto se některé druhy pěstují i ve vyšších nadmořských výškách.

Kávovníky se dožívají až třiceti let, ale se stářím poskytují i nižší úrodu. Nejproduktivnější jsou v pátém až šestém roce. Aby mohla být produkce kávy co největší, musí se rostliny pravidelně přihnojovat, prořezávat a chránit je proti přímému slunečnímu záření. Rostlin rodu *Coffea* existuje celá řada a to jak ve formě malých keříků, tak i velkých stromů dosahujících výšky až 12metrů. 98% světové produkce kávy pochází pouze ze dvou druhů kávovníků a to ARABICA a ROBUSTA.



## 2.3 Druhy kávovníku

Druh **ARABICA** je pěstován ve vyšších nadmořských výškách a je méně odolný proti různým chorobám a škůdcům a je choulostivější na mrazíky.

Druhým významným druhem je **ROBUSTA**. Jenž se pěstuje v nižších polohách a je méně náchylná na choroby a její pěstování není tak náročné. Obsahuje více kofeinu než Arabica.

Méně významným druhem kávovníku je **LIBERICA**. Dosahuje výšky až 18m. Je velmi silný a jeho plody mají i velká zrna, jenž mají velmi hořkou chuť. Tento druhu sice poskytuje vzhledem ke své velikosti větší produktivitu než ostatní druhy, nicméně kvalita kávy je spíše průměrná. [4][4]

Tab. 1: Srovnání nejvýznamnějších kávovníku na trhu

	<p><b>COFFEA ARABICA</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Běžnější</li> <li>• Méně hořká</li> <li>• Aromatictější</li> <li>• Delikátnější</li> <li>• Obsah kofeinu: 1,1 - 1,7%</li> <li>• Esenciální olej: 18%</li> <li>• Cukry: 8%</li> </ul>		<p><b>COFFEA ROBUSTA</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Tvrďší</li> <li>• Větší zrna</li> <li>• Drsnější chuť</li> <li>• Obsah kofeinu: 2 - 4,5%</li> <li>• Esenciální olej: 8 - 9%</li> <li>• Cukry: 5%</li> </ul>
---	--	---	---

## 2.4 Sklizeň plodů

Kávová zrna jsou vlastně pecky kulovitého (třešňového) plodu celoročně zeleného stromu. Tato maličká zrnka, která skrývají mnohá tajemství chutí a vůní, jsou semena kávovníku s bílými květy, jenž kvete jen několik málo dní, zato však několikrát do roka.

Boby kávy Arabica dozrávají během 6-8 měsíci, zatímco plody kávy Robusta 9-11 měsíci. Plody rostlin jsou zpočátku zelené, zráním mění barvu na špendlíkově žlutou, postupně červenají do barvy brusinek až zřídka do barvy zralých švestek. Barva a zralost plodů je pro kvalitu kávy velmi důležitá. Pod tuhou slupkou plodu je nasládlá dužina a v ní dvě zelená semena v pergamenové slupce. Pokud se v pergamenu nachází jen jedno semínko, nazývá se jako "perlová káva".

Plody jednotlivých kávovníku se nejčastěji sklízají ručně a to z toho důvodu, že kávové bobule nedozrávají na stejném keři ve stejnou dobu. Na rozlehlých plantážích se setkáváme i se strojním sbíráním plodů nebo také setřásáním na plachty. Průměrná výtěžnost z jednoho kávovníku za rok se pohybuje kolem 2 000 kávových bobů a to odpovídá přibližně 800g-1200g kávy.[5]



Obr.1: Květ a plody kávovníku

## 2.5 Zpracování plodů kávy

Kávové bobule je nutné dále zpracovat jedním ze dvou způsobů, tj. suché nebo mokré zpracování.

**Suché zpracování** – při tomto způsobu se sesbírané plody propírají ve vodě, kde se zbavují nečistot a pak se v tenkých vrstvách suší na vybetonovaných plochách nebo rozprostřených na sítích na slunci. Sušení trvá několik dní a to při teplotách 45-60°C. Během sušení se plody musí stále přehazovat. Po důkladném prosušení přicházejí na řadu loupací stroje, které odstraňují vysušenou dužinu včetně pergamenové slupky a jako výsledný produkt zůstávají čistá kávová zrna tzv. zelená káva. Tato metoda zpracování je levná, jednoduchá a navíc zvyšuje obsah cukru v zrnku kávy.

**Mokré zpracování** – tato metoda se používá pro dosažení kvalitnější kávy. Navíc při ní dochází k oddělení nezralých či seschlých plodů od plně vyzrálých, což má velký vliv na jakost zelené kávy. Plody jsou vsypány do nádrže s vodou, kde jsou zbaveny nečistot. Po určité době jsou protlačeny mezi drtící plechy jenž plod zbavují svrchní slupky a části dužiny. Zbytky dužniny se odstraňují fermentací. Po této operaci se zrna umyjí a usuší. Poslední operací je vyloupenutí z pergamenové slupky. Metoda je časově náročná, drahá a komplikovaná.

Zrna zpracována některou z těchto metod jsou nakonec setříděna podle velikosti a barvy a následně strojově leštěna. Takto připravená zelená káva je balena do jutových žoků a připravena k rozeslání do různých koutů světa. [6][7]

## 2.6 Pražení a skladování zelené kávy

Před pražením kávy je nutné ji nejdříve dobře uskladnit. Zelená káva může být skladována i několik let v prostorách k tomu určených a to v původních žocích, jenž jsou umístěny 10cm nad zemí a 15cm od stěn místností. Prostory by měly být suché, čisté, spíše chladnější max. 20°C a větrané s relativní vlhkostí max. 70%. Takto dané podmínky na teplotu a vlhkost ve skladu jsou dány náchylností kávy k plesnivění. Pokud v skladovacím prostoru dochází k příliš velkým změnám ve vlhkosti a teplotě je nutno investovat do regulačního zařízení a místnosti upravit tak, aby v ní byly předepsané podmínky splněny. Právě touto problematikou se ve své práci zabývám. Jejíž prvotním úkolem je navržení matematického modelu vysychání zelené kávy a po jeho určení je teprve možno navrhnout patřičnou regulaci teploty a vlhkosti.

Pražení kávy je poslední důležitou technologickou fází, používající pražicí stroje elektrické, plynové, průmyslové či stolní v závislosti na zpracovávaném množství kávy. Samotné pražení probíhá za teploty 160°C až 220°C, během něhož dochází k mnoha chemickým reakcím, zrno začíná měnit barvu z bledě zelené na tmavě hnědou. Při tomto procesu dochází k tvorbě asi 700 látek, které přisuzují každé kávě její aromatické vlastnosti. Důležitým poznatkem je, že upražená káva ztrácí na svých vlastnostech každým dnem. Proto je nejčastějším použitým způsobem balení kávy ve vakuu. Pomletím kávy jsou její ztráty rychlejší. [1][8]

### 3. Návrh matematického modelu vysychání zelené kávy

Účelem vysychání je snížení obsahu vlhkosti v tuhém materiálu, v našem případě zelené kávě, pomocí tepelné energie a to vypařováním a odváděním par, které se při procesu tvoří. Vysychání patří do skupiny procesů využívajících ke své činnosti principu difúze tj. samovolného přenosu látky pohybem molekul, z oblasti vyšší koncentrace, do oblasti s nižší koncentrací vlivem tepelného pohybu. Vlhkost tedy přechází do okolí povrchovým vypařováním vlhkosti a difúzí vlhkosti z vnitřních vrstev na povrch materiálu.

Při návrhu jsem vycházel z difúzních modelů, jenž jsou takové matematické modely, u kterých se předpokládá, že transport vlhkosti uvnitř pevné fáze se dá popsat difúzní rovnicí jejíž řešením je vlhkoštní pole uvnitř pevné fáze a časová závislost vlhkosti v okolním prostředí. Vztáhne-li se reakční rychlost vzniku dané vlhkosti na jednotkový objem a jednotku času, je možné bilanci vlhkosti v pevné fázi popsat takto [9]

$$r = \frac{\partial J}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial t} \quad (3.1)$$

Z toho vyplývá, že reakční rychlost vzniku vyvolá ekvivalentní změnu v hustotě difúzního toku  $J$  a akumulaci. Za předpokladu platnosti jednoduchých difúzních vzorců lze rovnici (3.1) přepsat na tvar:

$$D \frac{\partial^2 c}{x^2} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c_A}{\partial t} \quad (3.2)$$

kde

$$r = -\frac{\partial c_A}{\partial t} \quad (3.3)$$

pro vlhkost platí

$$c_A = K \cdot c \quad (3.4)$$

Pro vlhkost (3.1) a její aplikaci na (3.2) se získá po úpravě

$$\frac{\partial c}{\partial t} = k \frac{\partial^2 c}{x^2} \quad (3.5)$$

kde

$$K = \frac{D}{1+K} \quad (3.6)$$

Základní deterministický difuzní model s podmínkami tvoří matematickým modelem vlhkosti

$$\frac{\partial c}{\partial t}(x, t) = k \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, t > 0, 0 \leq x \leq b \quad (3.7)$$

symetrii vlhkostního pole v pevné fázi značí podmínka

$$\frac{\partial c}{\partial x}(0, t) = 0 \quad (3.8)$$

bilanční vztah, podle kterého je rychlost sdílení hmoty vlhkosti na povrchu tuhé fázi rovna akumulaci této vlhkosti v prostředí

$$V_0 = \frac{\partial c_p}{\partial t}(t) = -D \cdot S \frac{\partial c}{\partial x}(b, t) \quad (3.9)$$

okrajová podmínka prvního druhu - předpoklad dokonalého proudění vzduchu

$$c(b, t) = c_0(t) \quad (3.10)$$

konstantní rozdělení vlhkosti v tuhé fázi

$$c(x, 0) = c_p \quad (3.11)$$

počáteční vlhkost v prostředí

$$c_0(0) = c_{op} \quad (3.12)$$

Pro obecnější vyjádření a zjednodušení výpočtu byly zavedeny bezrozměrné veličiny

$$C = \frac{c - c_{op}}{c_p - c_{op}} = \frac{\Delta c}{\Delta c_p} \quad (3.13a)$$

$$C_0 = \frac{c_0 + c_{op}}{c_p + c_{op}} = \frac{\Delta c_0}{\Delta c_p} \quad (3.13b)$$

$$F_0 = \frac{kt}{b^2} \quad (3.13c)$$

$$X = \frac{x}{b} \quad (3.13d)$$

$$Na = \frac{V_0}{V} \quad (3.13e)$$

Aplikací bezrozměrných kritérií na rovnice (3.9) - (3.12) se získá bezrozměrný matematický model vlhkosti

$$\frac{\partial C}{\partial F_0}(X, F_0) = \frac{\partial^2 C}{\partial X^2}(X, F_0) \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial C}{\partial X}(0) = 0 \quad (3.15)$$

$$-\frac{Na}{1+K} \frac{\partial C_0}{\partial F_0}(F_0) = \frac{\partial C}{\partial X}(1, F_0) \quad (3.16)$$

$$C(X, 0) = 1 \quad (3.17)$$

$$C_0(0) = \frac{c_{op}}{c_p} \quad (3.18)$$

$$C(1, F_0) = \epsilon C_0(F_0) \quad (3.19)$$

Řešení tohoto modelu je provedeno Laplaceovou transformací. Po vyřešení byl získán vztah pro výpočet kořenů transcendentní rovnice

$$-\frac{Na \cdot q}{\epsilon(1+K)} = tg(q) \quad (3.20)$$

Výsledné řešení bezrozměrné vlhkosti v tuhé fázi

$$C = \frac{\epsilon(1+K)}{\epsilon(1+K)+Na} - 2 \cdot Na \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(X \cdot q_n) \cdot \exp(-F_0 q_n^2)}{\epsilon(1+K)\cos(q_n) - \frac{\epsilon(1+K)}{q_n} \sin(q_n) - Na \cdot q_n \cdot \sin(q_n)} \quad (3.21)$$

Bezrozměrná vlhkost v okolí

$$C = \frac{1}{\epsilon(1+K)+Na} - 2 \frac{Na}{\epsilon(1+K)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-F_0 q_n^2)}{\epsilon(1+K)+Na + \frac{q_n^2 \cdot Na^2}{\epsilon(1+K)}} \quad (3.22)$$

kde  $q_n$  jsou kořeny rovnice (3.20)

## 4. Programová aplikace

Cílem v této části, je vytvoření funkční programové aplikace v prostředí MATLAB, pro výpočet vlhkosti v tuhé fázi, okolním prostředí a stanovení úbytku hmotnosti pevné fáze.

### 4.1 Vysychání zelené kávy

Po spuštění programu se zobrazí úvodní okno pro zadávání parametrů pro výpočet

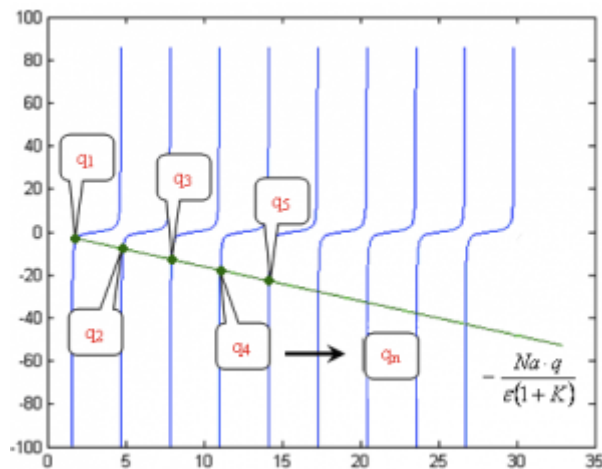


Obr. 2 – Úvodní obrazovka programu

Vyplněním všech polí důležitých pro výpočet se po stisku tlačítka “bezrozměrný” popř. “rozměrný” zobrazí v dalším okně příslušné grafy. V opačném případě, kdy nebyla vyplněna řádně všechna pole, se zobrazí chybová zpráva, upozorňující na nutné doplnění chybějících údajů.

## Hledání kořenů transcendentní rovnice

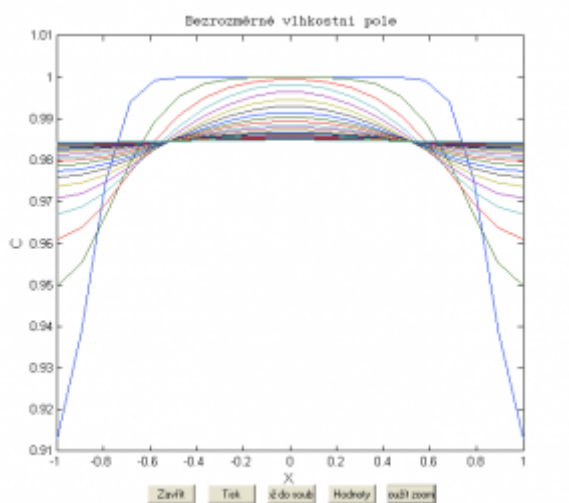
Abych se dopočítal k optimálním výsledkům, musel jsem nejdřív nalézt kořeny transcendentní rovnice, tzn. nalézt průsečíky přímky s tangentoidami:



Obr. 3 - Průsečíky přímky s tangentoidami

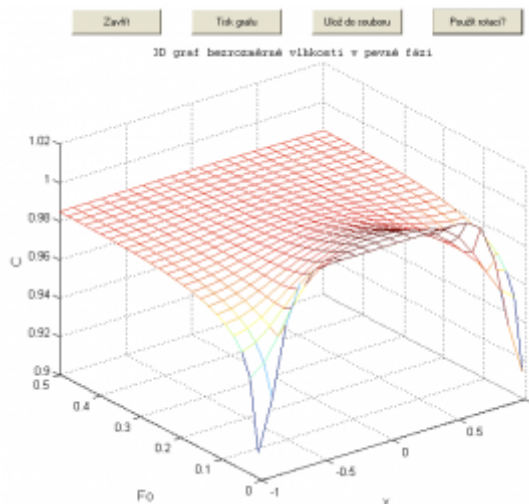
## Bezrozměrné vlhkostní pole v tuhé fázi

Dosazením hodnot do vztahu (3.21), jsem schopen vytvořit 2D a 3D graf vlhkostního pole v tuhé fázi - Obr. 4



Obr. 4 - 2D graf bezrozměrného vlhkostního pole v tuhé fázi

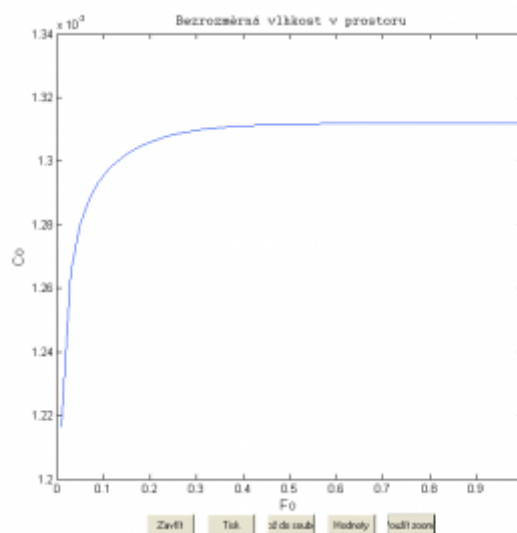




Obr. 5 – 3D graf bezrozměrného vlhkostního pole v tuhé fázi

### Bezrozměrná vlhkost v okolním prostředí

Bezrozměrnou vlhkost získám s použitím vztahu (3.22)



Obr. 6 – Bezrozměrná vlhkost v okolním prostředí

## 5. Závěr

Protože káva se stala součástí našeho života, je důležité dodržovat určité podmínky při jejím skladování, aby nedocházelo k negativním účinkům na její aroma a chuť. Pro její skladování je nutné nalézt vhodné skladovací prostory, případně místnosti technicky upravit tak, aby byly neustále dodrženy žádané hodnoty teploty a relativní vlhkosti vzduchu.

Na základě vyřešení deterministického difúzního modelu, popisujícího transport vlhkosti z pevné fáze do okolí, jsem vytvořil funkční programovou aplikaci v prostředí Matlab, pomocí níž lze zobrazit, 2D a 3D graf vlhkostního pole v tuhé fázi a závislost vlhkosti v okolí na čase. Dále umožňuje uložit a vytisknout příslušné grafy a zobrazuje vypočítané hodnoty.

Výsledky práce mohou být využívány jak v pedagogice, tak i v technické praxi. Navržený model je obecně platný a popisuje průběh vysychání jakékoliv porézní tuhé

látky jejíž vlastnosti do programové aplikaci zadáme, proto je využití uvedeného řešení široké.

## 6. Seznam použitých zkratk

Symbol	Význam	Jednotka
b	poloviční tloušťka tuhé fáze	[m]
c	vlhkost v pevné fázi	[kg.m <sup>-3</sup> ]
C	Bezrozměrné vlhkostní pole v tuhé fázi	[1]
c <sub>0</sub>	Vlhkost v okolí	[kg.m <sup>-3</sup> ]
C <sub>0</sub>	Bezrozměrná vlhkost v okolí	[1]
c <sub>op</sub>	Počáteční vlhkost v okolí	[kg.m <sup>-3</sup> ]
c <sub>p</sub>	Počáteční vlhkost v tuhé fázi	[kg.m <sup>-3</sup> ]
D	Hodnota difúzního koeficientu	[m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup> ]
ε	Porozita	[1]
F <sub>0</sub>	Fourierovo kritérium, bezrozměrný čas	[1]
K	Rovnovážná konstanta sorpce (síla vazby vlhkosti na tuhou fázi)	[1]
k	Konstanta, $k=D/(K+1)$	[1]
Na	Bezrozměrná spotřeba okolí	[1]
q <sub>n</sub>	n.tý kořen transcendentní rovnice	[1]
S	Plocha pevné fáze	[m <sup>2</sup> ]
t	Čas	[s]
T	teplota	[K]
V	Objem pevné fáze	[m <sup>3</sup> ]
V <sub>0</sub>	Objem okolí	[m <sup>3</sup> ]
x	Souřadnice polohy	[m]
X	Bezrozměrná vzdálenost	[1]

## Literatura

- BOUDA, L. Dlouhodobé skladování zelené kávy, Zlín: FT UTB ve Zlíně, Bakalářská práce 2008
- Historie kávy, <http://www.kava-franck.cz/?p=/o-kave/historie-kavy>, [cit. 20.4.2010]
- ŽÁČEK, Z., Zajímavě o kávě, čaji a kakau, 2 vyd., Vydavatelství obchodu, 1962
- Vše o kávě, [http://www.gastrokafe.cz/Stranka\\_Vse\\_o\\_kave,Language=Cz.htm](http://www.gastrokafe.cz/Stranka_Vse_o_kave,Language=Cz.htm), [cit. 20.4.2010]
- O kávě, <http://www.kava.cz/index2.php?kam=okave>, [cit. 20.4.2010]
- THORN, J., Káva, 1 vyd., Fortuna Print, 2000. ISBN 80-86144-64-X
- AUGUSTÍN, J., Povídaní o kávě, Fontána, 2003. ISBN 80-7336-040-3
- Zpracování kávy, <http://www.caffe.cz/info/metody-upravy>, [cit. 20.4.2010]
- KOLOMAZNÍK, K. Modelování zpracovatelských procesů. Brno: VUT v Brně, určeno pro posluchače FT ve Zlíně, 1990. s. 51-79. ISBN 80-214-0114-1.
- CRANK, John, The Mathematics of Diffusion, Oxford: Oxford University Press, 1979, 414s. ISBN 978-0-19-853411-2

- 
- ZAPLATÍLEK, Karel, DOŇAR, Bohuslav, MATLAB pro začátečníky. Praha 2007, 152s. ISBN 80-7300-175-6
  - ZAPLATÍLEK, Karel, DOŇAR, Bohuslav, MATLAB tvorba uživatelských aplikací. Praha 2005, 216s. ISBN 80-7300-133-0
- 

Studentská tvůrčí a odborná činnost 2010, FAI UTB ve Zlíně

---